



面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高等数学

上 册

仇庆久 编

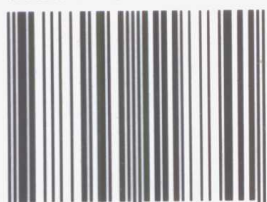


高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Advanced Mathematics



ISBN 7-04-011884-X



9 787040 118841 >

定价 24.90 元

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

高等数学

上册

仇庆久 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材,同时也是普通高等教育“九五”国家级重点教材。

本教材思路新,观点高,基础扎实,知识面宽,并注意运用近代数学的思想解决问题。本书分上、下两册。上册内容包括:几何与代数方法初步,导数——函数的分析与研究 I,积分——函数的分析与研究 II。

本书可作为高等院校理科各专业的教材,也可供各类专业人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/仇庆久编. —北京:高等教育出版社,
2003.5

ISBN 7-04-011884-X

I. 高... II. 仇... III. 高等数学-高等学校-
教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 009874 号

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100011

总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

排 版 高等教育出版社照排中心

印 刷 化学工业出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16

印 张 23.75

字 数 430 000

版 次 2003 年 5 月第 1 版

印 次 2003 年 5 月第 1 次印刷

定 价 24.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

1996年上半年,本书作者向原国家教委呈报《普通高等教育“九五”国家级重点教材立项申请书》,1997年5月得到批准,本书正式立为《“九五”国家级重点教材》项目。自1996年9月起,作者领导的教学小组在南京大学基地班开始进行教学改革试点,经过3年的教学实践,1999年9月开始,又在南京大学基础学院进行第4次教学,边教、边改、边总结,并在2000年初,由原国家教委高等学校教学与力学教学指导委员会主任姜伯驹院士推荐作为“面向21世纪课程教材”出版。2000与2001两个学年继续在南京大学基础学院进行第5、6次教学,在此基础上写成了现在这本书。

20世纪90年代前期,作者得知南京大学物理系卢德馨教授锐意改革,在教学实践基础上,为南京大学基础学科教学强化部写了一本《大学物理学》,集力学、热物理、电磁学、近代物理于一书,思路新、观点高,基础扎实、知识面宽,体现了物理学教学大力度的改革,这对作者确实是一个很大的震动。多年来,不少数学家对非数学类专业的高等数学课程进行了教学改革,编写了不少好教材。作者在卢德馨教授的启发下,想进一步考虑如何做到:①传授数学基本知识与加强数学素质教育相结合;②培养数学思维方法与解决实际问题的能力相结合;③快速发展的现代数学与大学数学教学相结合。通过这些结合,使学生不仅学到必要的数学知识,而且以教材中精选的数学知识为载体,得到数学思维的训练和数学素质的提高,达到牢固掌握并灵活运用本学科领域所需的数学思想和工具,特别是近代数学的思想和工具的水平,使数学成为他们未来工作中赖以生存的“强者的翅膀”,从而成为在新世纪中有创造能力的、本学科领域中的开拓者。这便是作者进行高等数学课程体系、教学内容、教材和教学手段改革的目的。

本书是这样安排的:

第一章介绍几何与代数方法初步。在中学所学初等数学知识的基础上,把学生对数学思维方法的认识提高一步,通过向量和向量空间的引入,强调几何与代数方法的渗透与结合。把空间解析几何与线性代数作为基本知识和载体,使学生掌握空间常用的几何形体(包括直线、平面、二次曲面等)的代数表示,并熟练掌握一次、二次代数方程的几何图形。然后,提出几何形体在不同坐标架下的表示并引入坐标变换,从而加强学生对几何方法与代数方法相互渗透的理解和使用。进一步,把从中学所学的二元一次代数方程组与向量的运算引入行列式,并拓广到矩阵,再引申到一般线性代数方程组。如此在初等数学知识基础上形

成“几何方法与代数方法相互渗透”的思维,使刚离开高中踏进大学的学生既不感到所学知识的跳跃太大,又能在认识问题和思考问题方面有一个较大的提高。

第二、三、四章以函数的分析与研究为主线,介绍经典微积分的主要内容:微分、积分、级数。重点强调这些概念的来龙去脉、发展过程、定义、性质、运算,同时在每个部分都以极限为基础,给微分、积分、级数以准确的定义,使学生对数学的严格性、逻辑性、系统性有进一步深入的理解。在熟练掌握有关的基本知识后,结合物理、几何等实例,强调微积分的应用,使学生深刻认识到微积分是研究函数的有力工具。然而,也必须指出,这些工具决非万能的,还必须引入新的概念与新的工具,由此介绍勒贝格(Lebesgue)积分的基本概念、性质、应用,为第五章奠定基础。第二、三、四章是本教材的核心部分,作者致力于从经典微积分到近代分析的自然过渡,引导学生在牢固掌握经典微积分工具的前提下逐步过渡到对现代数学思维方法的理解及对其重要数学工具的应用。

第五章是微分方程和傅里叶(Fourier)分析,以物理学及其应用为背景,介绍常、偏微分方程的基本理论、数值方法等,自然过渡到傅里叶分析与谱分析。在介绍傅里叶分析的基本理论 and 应用之后,把在现代科技理论和实际应用中起特殊作用的小波分析——近二十余年才发展起来的重要分析工具——及其应用作为本章的结束。

由于20世纪后几个十年中,自然科学的许多领域更多地用到近代数学的知识,因此第六章将步入现代数学的大门,以介绍空间结构的点集拓扑、泛函分析、近世代数的基本知识开始,继而是分布理论,然后把刻画宇宙本质的、作为现代科技基础的非线性科学介绍给学生。一是为了后行课的需要,二是为大学生准备必要的近代数学基础知识。

本教材所选用的知识载体跨度较大,为使学生顺利掌握知识、学会数学思维,我们还着力于教学手段的改革,以形象思维启发抽象思维,以几何直观引导分析概念,并辅助以启发性的思考题,形成一个既可作为辅助教材又可独立使用的完整的多媒体资料。多媒体辅助资料的使用,使教材中知识载体的跨度显得相对稳定。这可以说是我们在教学改革过程中的另一个重要措施和大胆尝试。

本教材是在教育部直接领导下,在江苏省教育厅和南京大学校领导的关怀、指导、支持下进行改革的。教学小组的同志,南京大学苏维宜、姚天行、尹会成教授,马传渔、江惠坤副教授为教材的初稿分别撰写了许多章节,配以习题,并进行教材的试教;苏维宜教授承担教材的试教、多次修改、统稿工作;吴兆金副教授为本教材的配图和题解做了大量有益的工作;南京大学基础学院的领导和同事们,卢德馨院长,赵航东女士等,对于本教材的改革与使用都给予大力支持,在此一并致谢。

由于作者水平有限,对教学改革的理解还很不深刻,教材的改革思路、取材、

编写等方面错误在所难免,还存在许多不尽如人意之处,敬请专家、教授和读者不吝赐教。

作者

2003年1月于南京大学



面向 21 世纪课程教材



普通高等教育“九五”
国家级重点教材

责任编辑	薛春玲
封面设计	张楠
责任绘图	吴文信
版式设计	史新薇
责任校对	杨雪莲
责任印制	孔源

目 录

第一章 几何与代数方法初步	(1)
§ 1.1 引言	(1)
§ 1.2 向量	(3)
1.2.1 直角坐标系	(3)
1.2.2 向量及其表示	(4)
1.2.3 向量的内积、外积	(6)
习题	(9)
§ 1.3 空间中的平面与直线	(10)
1.3.1 空间中的平面及其方程	(10)
1.3.2 空间中的直线及其方程	(13)
1.3.3 平面与直线的关系	(17)
习题	(25)
§ 1.4 二次曲面	(27)
1.4.1 空间曲面	(27)
1.4.2 柱面及其方程	(29)
1.4.3 锥面及其方程	(33)
1.4.4 旋转面及其方程	(37)
1.4.5 直纹面	(41)
1.4.6 常见二次曲面的分类	(44)
习题	(47)
§ 1.5 行列式	(50)
1.5.1 问题的提出	(50)
1.5.2 行列式的定义及性质	(51)
习题	(64)
§ 1.6 矩阵	(65)
1.6.1 矩阵的定义及运算,初等变换	(65)
1.6.2 矩阵的秩	(82)
1.6.3 利用矩阵讨论线性方程组的解	(89)
习题	(101)
第二章 导数——函数的分析与研究 I	(106)
§ 2.1 引言	(106)
习题	(110)
§ 2.2 极限	(111)

2.2.1 数列的极限	(111)
2.2.2 函数的极限	(113)
2.2.3 极限运算及判别准则	(115)
2.2.4 两个重要的极限	(117)
2.2.5 无穷小量、无穷大量	(121)
2.2.6 函数的连续性	(122)
习题	(127)
§ 2.3 导数	(129)
2.3.1 函数的导数概念	(129)
2.3.2 几种初等函数的导数	(133)
§ 2.4 求导法则	(134)
2.4.1 导数的四则运算	(134)
2.4.2 反函数的求导法则	(135)
2.4.3 复合函数的求导法则	(137)
2.4.4 对数求导法则	(138)
2.4.5 隐函数求导法则	(138)
2.4.6 参数式求导法则	(139)
2.4.7 导数基本公式表	(139)
习题	(140)
§ 2.5 导数应用	(141)
2.5.1 应用的依据——三个重要定理	(141)
2.5.2 求极限的洛必达法则	(143)
2.5.3 函数性质及其图形的研究	(145)
2.5.4 平面曲线的曲率	(152)
§ 2.6 微分	(154)
2.6.1 微分的定义、几何意义	(154)
2.6.2 微分的运算法则	(155)
2.6.3 微分的应用	(156)
习题	(160)
§ 2.7 多元函数	(161)
2.7.1 多元函数的概念	(161)
2.7.2 多元函数的极限	(162)
2.7.3 多元函数的连续性	(165)
2.7.4 多元函数的偏导数	(166)
2.7.5 多元函数的全微分、方向导数	(167)
2.7.6 多元函数的复合	(170)
2.7.7 应用	(173)
习题	(177)

第三章 积分——函数的分析与研究 II	(182)
§ 3.1 积分定义	(182)
§ 3.2 积分性质与计算	(187)
3.2.1 定积分的性质, 牛顿 — 莱布尼茨公式	(187)
3.2.2 不定积分的定义、性质、意义与积分法	(189)
3.2.3 定积分的计算	(207)
3.2.4 椭圆积分	(210)
习题	(211)
§ 3.3 多重积分	(216)
3.3.1 二重积分的定义、性质	(216)
3.3.2 二重积分的计算, 直角坐标、极坐标下的计算公式	(219)
3.3.3 二重积分换元积分法	(223)
3.3.4 三重积分及多重积分	(225)
习题	(235)
§ 3.4 曲线积分、曲面积分	(238)
3.4.1 第一型曲线积分定义、性质、计算公式	(238)
3.4.2 第二型曲线积分定义、性质、计算公式	(242)
3.4.3 第一型曲面积分定义、性质、计算公式	(247)
3.4.4 第二型曲面积分定义、性质、计算公式	(252)
3.4.5 格林公式、斯托克斯公式、高斯公式	(260)
习题	(275)
§ 3.5 积分的应用	(277)
3.5.1 曲线长度、曲面面积、立体体积	(277)
3.5.2 力、力矩、惯性矩、转动惯量	(284)
3.5.3 场论——梯度、散度、旋度	(290)
习题	(299)
§ 3.6 反常积分, 含参量的积分	(301)
3.6.1 收敛性与发散性、判别法	(301)
3.6.2 含参量的积分, 一致收敛概念	(309)
3.6.3 斯蒂尔切斯积分	(316)
习题	(317)
§ 3.7 复变量函数的微积分	(318)
3.7.1 复数与复映射	(318)
3.7.2 复映射的极限、微积分	(322)
习题	(332)
§ 3.8 勒贝格积分	(333)
3.8.1 勒贝格积分的定义, 黎曼积分的推广	(333)
3.8.2 勒贝格积分的重要性质	(336)

3.8.3 黎曼积分与勒贝格积分的比较.....	(338)
3.8.4 勒贝格平方可积空间.....	(340)
习题	(340)
附录	(341)
Fourier 变换表	(341)
习题答案	(345)
参考文献	(365)

第一章 几何与代数方法初步

本章介绍高等数学中用到的最基本的几何与代数方法,包括向量、三维空间中平面、直线与常见的二次曲面的方程;行列式、矩阵的概念与性质以及它们在解多元线性代数方程组中的应用.

§ 1.1 引言

数学是研究事物(对象)的存在形式与数量关系的科学,它是一切科学的基础.近年来,数学已被诸多领域的科学家称为“数学科学”,足见其对科学发展所起的重要作用及产生的深远影响.

当代科学的发展需要数学,需要用数学工具定量地、定性地刻画事物内在的规律,通过建立数学模型,使用数学方法并借助电脑的计算与控制,从而得到所需的结果,以达到高新科技的各种技术特性与数据的要求.数学已渗透到各个学科中,推动着科学技术的发展.同时,数学的发展也需要当代科学,如物理学、天文学、生命科学、地球科学、计算机科学、乃至一切科学,它们都是数学的源泉与数学发展的动力.大自然就是在各科学分支的相互联系、相互渗透、相互交叉、相互推动的微妙关系中被认识、被研究、被改造、被发展,从而服务于人类的.

数学在研究事物(对象)存在形式与数量关系时,有其自身的特点其着眼点不仅是事物的具体内容,而且是事物的内在结构.通过具体事物,分析其存在的空间形式、自身的以及与其它事物之间的数量关系,总结、升华,得到普遍规律与数学模型,使数学科学具有高度的抽象性和广泛的应用性.

那么,如何研究事物存在的空间形式与数量关系呢?数学科学蕴含着丰富的思维方法和技巧,而高等数学则着重介绍数学的基本概念、重要理论、解题技巧,展示数学的思维方法,进行数学素质教育,培养使用数学工具的能力.这里,首先给出一个例子,就是作为数学思维方法之一的几何方法与代数方法的结合.

早在 17 世纪,法国科学家笛卡儿(Descartes, R.)在他的数学著作《几何学》中,就已阐明了关于解析几何的思想.笛卡儿将空间形式的研究与相应的数量关系的研究结合起来,显示了极大的优越性.他的做法是:首先引入“坐标系”,然后将空间中的点与坐标系中的数(或有序的数组)建立起“一一对应”关系,从而把对空间形式的研究与对坐标系中数的关系的研究结合起来.读者记得,在平面几何的证题术中,不太提倡用代数的方法,那是初等数学所希望遵循的证题思路,

高等数学却不再受这个限制.

在直线上建立(一维)坐标系的过程如下:在该直线上任取一个点 O , 使其对应于数 0 , 称 O 为原点. 在直线上指定一个方向, 例如向右为正向(则向左为负向), 再取一个单位长度(如图 1.1.1), 我们称赋予原点、正向与单位长度的直线为坐标轴, 于是建立了直线上的坐标系. 从原点 O 起, 将所有正实数按其大小排列在坐标轴的正方向, 负实数排列在负方向, 这样就实现了数轴上的点与实数之间的一一对应. 于是数轴上的任一点 M 与一个实数 α 相对应, 反之亦然. 称实数 α 为点 M 的坐标. 此时数轴上的任意两点 A 与 B 之间的距离用 $\rho(A, B)$ 表示

$$\rho(A, B) = |x_A - x_B|,$$

其中 x_A 与 x_B 分别为 A 与 B 的坐标.

类似地, 在平面上可建立(二维)坐标系, 只是坐标轴为两条互相垂直的直线, 其交点取为坐标原点 $O(0, 0)$, 再取定单位长度, 并用一对有序实数 (α, β) 表示平面上任一点 P 的坐标(如图 1.1.2), 此时平面上的任意两点 $A(\alpha_1, \beta_1)$ 与 $B(\alpha_2, \beta_2)$ 之间的距离 $\rho(A, B)$ 表示为

$$\rho(A, B) = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}.$$

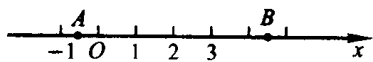


图 1.1.1

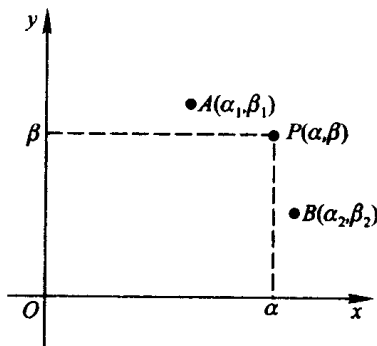


图 1.1.2

当然, 在空间可以建立(三维)坐标系.

借助于上述方法, 可以用数量关系刻画平面上的曲线, 所得的关系式称为曲线方程; 还可以刻画空间中的曲线与曲面, 所得的关系式称为曲线方程与曲面方程. 这是问题的一个方面.

问题还有另一方面: 为了讨论事物数量之间的关系, 我们必须深入了解并掌握数量关系的几何结构; 同时, 由于几何的直观性, 用几何语言描述研究对象并展现事物的几何结构, 能更形象、更本质地呈现事物之间的数量关系, 而且往往能对较为复杂的数量关系赋予更为生动的感性认识, 也更有助于对问题的理解

与研究.

以上两个方面可理解为“几何方法与代数方法的结合”,解析几何这门成熟的数学课程中就充满了几何方法与代数方法相结合的实例.

§ 1.2 向 量

中学数学教程中已经学习过平面解析几何,我们从讨论空间中的几何图形的代数表示开始.

1.2.1 直角坐标系

类似于平面直角坐标系的建立,在空间中取定一点 O 作为坐标系的原点,过 O 点引三条互相垂直的直线作为坐标轴,分别称为 Ox 、 Oy 、 Oz 轴.约定三个坐标轴的正向如图 1.2.1 所示,三轴的正向成右手系(与物理学中所使用的右手坐标系方向一致).取定单位长度置于三个坐标轴上,于是我们建立了空间中的(三维)直角坐标系,把这个已建立了直角坐标系的空间称为三维欧几里得空间,简称三维欧氏空间,记为 $\mathbf{R}^3$.

$\mathbf{R}^3$ 中任意一点 P 与三个有序实数 α, β, γ 建立如下的对应关系:

过 P 点作三个平面,分别垂直于 Ox 、 Oy 、 Oz 轴,三平面依次与三坐标轴相交于 G 、 M 、 N .设 G 在 Ox 轴上的坐标为 α , M 在 Oy 轴上的坐标为 β , N 在 Oz 轴上的坐标为 γ ,于是这三个有序实数便由点 P 唯一地确定,记为 $P(\alpha, \beta, \gamma)$,并称 (α, β, γ) 为 P 的直角坐标.反之,任一组三个有序实数 (α, β, γ) 给定后,分别在 Ox 、 Oy 、 Oz 轴上取以 α, β, γ 为坐标的点 G 、 M 、 N ,过 G 、 M 、 N 分别作与 Ox 、 Oy 、 Oz 轴垂直的平面,相交于唯一的点,记为 $P(\alpha, \beta, \gamma)$.这

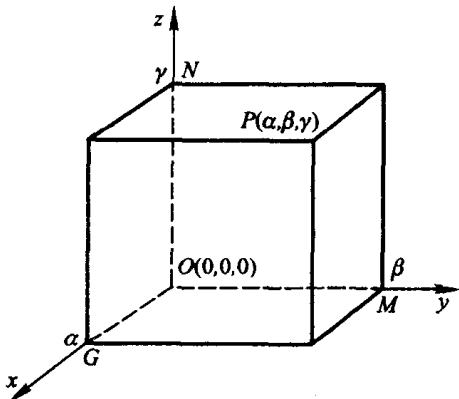


图 1.2.1

样,在三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的直角坐标系中,点 P 与数组 (α, β, γ) 建立了一一对应关系,“形”(点 P)与“数”(数组 (α, β, γ))实现了“统一”.

现在我们用另一个观点来看 $\mathbf{R}^3$ 中的点 P .把点 P 看作是以原点 O 为起点、以 P 为终点的“有向”线段,记为 $\overrightarrow{OP}$,其长度为 $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$,并把有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 称为一个向量(或矢量),把数组 (α, β, γ) 称为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标.显然,“形”(向量 $\overrightarrow{OP}$)与“数”(数组 (α, β, γ))建立了一一对应关系.

在新的观点下,我们会得到什么新的内涵呢?

1.2.2 向量及其表示

定义 1.2.1(向量) 我们称 $\mathbf{R}^3$ 中既有方向又有大小的一个量(有向线段)为向量. 向量的(正)方向是从它的起点 A 到它的终点 B , 记为 $\overrightarrow{AB}$; 向量的大小就是它的长度, 也称为向量的模, 记为 $|\overrightarrow{AB}|$.

注 1 由向量的定义可知, 一个向量的起点可以是空间中的任何点, 起点不一定在原点. 凡是以原点 O 为起点的向量 $\overrightarrow{OA}$, 就可以用它的终点 A 的坐标 $A(\alpha, \beta, \gamma)$ 作为该向量的坐标表示

$$\overrightarrow{OA} = (\alpha, \beta, \gamma).$$

在三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中, 所有向量的全体组成一个集合, 称其为“向量空间”, 记为 $X = \{a: a \text{ 为 } \mathbf{R}^3 \text{ 中的向量}\}$. 向量空间 X 中的“元素”(简称“元”)就是向量.

中学物理教程中已经学到, 力是有方向与大小的物理量, 因此, 可用向量空间中的向量表示物理学中的力 F , 还可以用向量表示许多既有方向又有大小的量.

在新建立的向量空间 X 中, 可以引入“元的运算”: 相等、加法、数乘、内积、外积、等等.

1. 向量的相等

若两个向量 a, b 的大小相等、方向相同(即正方向一致), 则称这两个向量相等, 记为 $a = b$.

易见, 若两向量 a, b 起点相同, 则 $a = b$ 的充要条件是它们的终点相互重合. 也不难看出, 起点与终点分别重合的两个向量是相等的, 但两个相等的向量并不要求其起点与终点分别重合.

向量相等的定义允许两个向量不在同一个位置(见图 1.2.2), 只要其方向相同, 大小相等. 又由于一个确定的方向在平行移动时不变, 于是我们约定, 任一向量可以进行平行移动, 并称为自由向量. 今后如果没有特别声明, 我们所指的向量是自由向量.

注 2 数学上定义两个量 α, β “相等”, 记为“ $\alpha = \beta$ ”, 须满足相等的三公理:

自反性 $\alpha = \alpha$;

对称性 $\alpha = \beta$ 蕴含 $\beta = \alpha$;

传递性 $\alpha = \beta$ 与 $\beta = \gamma$ 蕴含 $\alpha = \gamma$.

显然, 关于向量相等的定义满足这三条公理.

2. 向量的加法与数乘

加法 假设 a, b 为两个自由向量, 且 b 的起点已与 a 的终点重合(如图 1.2.3), 它们的“和”, 记为 $a + b$, 定义为一个向量

$$c \equiv a + b, \quad (1.2.1)$$

向量 c 的起点是 a 的起点, 而终点是 b 的终点. 或等价地, 两向量的和 c 是以 a 、 b 为边所作平行四边形 $OACB$ 的对角线(图 1.2.3).

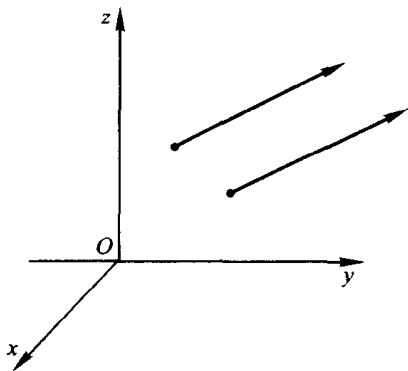


图 1.2.2

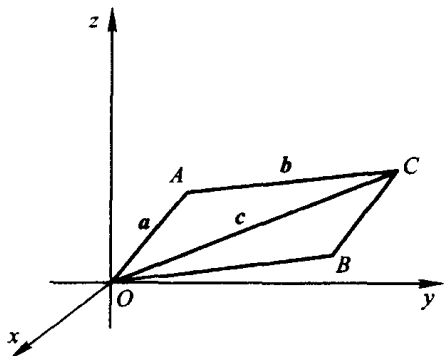


图 1.2.3

数乘 向量 a 与实数 α 的“数乘”, 记为 αa , 定义为一个向量 $c = \alpha a$, 此向量以 a 的起点为起点, 模为

$$|c| = |\alpha| |a|, \quad (1.2.2)$$

方向为: 当 $\alpha > 0$ 时, αa 与 a 的方向相同; 当 $\alpha < 0$ 时, 它与 a 的方向相反; 当 $\alpha = 0$ 时, αa 为零向量.

我们约定: 零向量 0 的模为 0, 其方向不定(有时称为迷向向量).

至此, 在集合 X 中定义了向量的加法与数乘运算. 现在我们用坐标来表示它们.

① 向量的坐标表示

首先用向量 $e_1 = (1, 0, 0)$ 、 $e_2 = (0, 1, 0)$ 、 $e_3 = (0, 0, 1)$ 表示三个坐标轴上的三个单位向量. 于是, 终点为 $A(a_1, a_2, a_3)$ 的向量 $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ 可表示为

$$\overrightarrow{OA} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad (1.2.3)$$

其长度为 $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

② 向量加法的坐标表示

设两向量为 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $b = (b_1, b_2, b_3)$, 则由向量的加法定义可得加法的坐标表示

$$a + b = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \quad (1.2.4)$$

向量空间 X 中的向量加法的运算规则

$$a + b = b + a, \quad (\text{交换律})$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (\text{结合律})$$

$$a + 0 = a, \quad (\text{存在零元})$$

$$a + (-a) = 0. \quad (\text{存在逆元})$$

以 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 为起点、 $P = (x, y, z)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 的表示式为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} \\ &= (xe_1 + ye_2 + ze_3) - (x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3) \\ &= (x - x_0)e_1 + (y - y_0)e_2 + (z - z_0)e_3, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

其长度为 $|\overrightarrow{P_0P}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

③ 向量数乘的坐标表示

设 $a = (a_1, a_2, a_3)$, α 为实数, 则由向量 a 与数 α 的乘法定义可得数乘的坐标表示

$$\alpha a = \alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3), \quad (1.2.6)$$

其长度为 $|\alpha a| = |\alpha| |a|$.

图 1.2.4 所绘的图是向量数乘的几何表示.

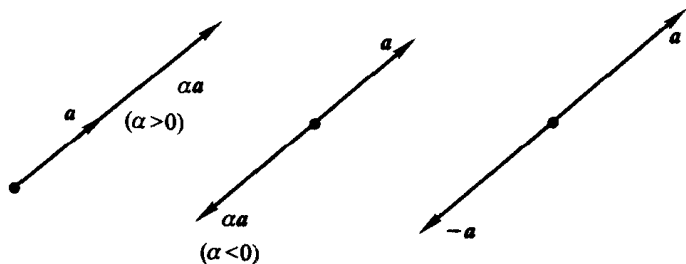


图 1.2.4

向量空间 X 中的向量数乘的运算规则

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad (\text{结合律})$$

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \quad (\text{分配律})$$

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b. \quad (\text{分配律})$$

1.2.3 向量的内积、外积

向量之间还有两种有用的重要运算: 向量的内积与向量的外积.

1. 向量的内积及其坐标表示

内积 两个向量 a, b 的内积, 定义为一个数, 记为 $a \cdot b$,

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (1.2.7)$$

其中 θ 是两向量之间的夹角. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 称向量 a, b 正交(垂直), 记为 $a \perp b$.

如果 a, b 都不是零向量, 则 a 与 b 正交的充分必要条件是: 其内积为 0, 亦

即, $a \perp b$, 当且仅当 $a \cdot b = 0$.

我们规定, 零向量与任何向量正交.

向量空间 X 中的向量内积的运算规则

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad (\text{交换律})$$

$$(\alpha a) \cdot (\beta b) = \alpha \beta (a \cdot b), \quad \alpha, \beta \text{ 为常数}, \quad (\text{结合律})$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \quad (\text{分配律})$$

定理 1.2.1(向量内积的坐标表示) 向量 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 与 $b = (b_1, b_2, b_3)$ 的内积的坐标表示是

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (1.2.8)$$

证 由定义, 写出单位向量 $e_1 = (1, 0, 0)$ 、 $e_2 = (0, 1, 0)$ 、 $e_3 = (0, 0, 1)$ 的内积

$$e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1;$$

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = 0,$$

并定义一个称为克罗内克(Kronecker. L.)的符号

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

于是, $e_k \cdot e_j = \delta_{kj}$ ($k, j = 1, 2, 3$), 并且有

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned}$$

定理得证.

特别地, 向量 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 的模 $|a|$ 的坐标表示为

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(a \cdot a)}. \quad (1.2.9)$$

当 a, b 都不是 0 向量时, 其夹角的余弦值表示为

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (1.2.10)$$

定义 1.2.2(方向余弦) 记向量 a 与 e_1 的夹角为 α , 与 e_2 的夹角为 β , 与 e_3 的夹角为 γ , 称 α, β, γ 为向量 a 的方向角, 方向角的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 a 的方向余弦.

由

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

两边与 e_k 作内积, 并利用 e_k 的内积公式, 得到 $a_k = a \cdot e_k$ ($k = 1, 2, 3$), 故

$$a = (a \cdot e_1) e_1 + (a \cdot e_2) e_2 + (a \cdot e_3) e_3.$$

于是

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \\ \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \\ \cos \gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \end{cases} \quad (1.2.11)$$

由此得

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (1.2.12)$$

在物理学中我们已经知道,如果一个大小、方向均不变的力 $\mathbf{F}$,作用在一个质点 M 上,使该点有一个位移 $\mathbf{s}$,则力 $\mathbf{F}$ 所作之功为

$$W = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos \theta,$$

这里 θ 是力 $\mathbf{F}$ 与位移向量 $\mathbf{s}$ 之间的夹角,用内积的记号,有(图 1.2.5(a))

$$W = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}.$$

2. 向量的外积及其坐标表示

外积 两个向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 的外积定义为一个向量,记为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,其模为

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta, \quad (1.2.13)$$

其方向是使三向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 成右手系的方向(图 1.2.5(b)).

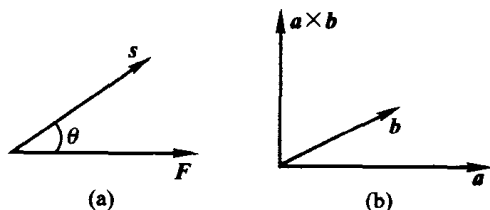


图 1.2.5

当 $\theta = 0$ 时,两向量平行,记为 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. 易见,向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行的充分必要条件是外积为 0,亦即 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$,当且仅当 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

我们规定:零向量与任何向量平行.

向量空间 X 中的向量外积的运算规则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (\text{反交换律})$$

$$(\alpha \mathbf{a}) \times (\beta \mathbf{b}) = \alpha \beta (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数}), \quad (\text{结合律})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \quad (\text{分配律})$$

定理 1.2.2 (向量外积的坐标表示) 向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 与 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 的外积的坐标表示是

$$\begin{aligned} & \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

证 由定义知

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

利用上述诸等式即可验证公式(1.2.14)成立.

向量的外积有明显的几何意义: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的模 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \sin \theta$, 恰好等于以 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 为边构成的平行四边形的面积.

向量的外积在物理、气象等许多学科中有重要应用, 例如刚体绕固定轴旋转的角速度与其线速度之间的关系, 就可用向量外积表示, 这在本教程以后章节中会遇到.

习 题

1. 求点 $(-1, -2, 3)$ 关于 xOy 平面与 Ox 的对称点.

2. 求点 (a, b, c) 到 xOy 平面 yOz 平面 xOz 平面的距离.

3. 将圆周分成六等分, 分点依次为 A, B, C, D, E, F , 求证

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3 \overrightarrow{AD}.$$

4. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$ 和 $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, 试把平行四边形 $ABCD$ 四边用向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 表出.

5. 设 $O-ABC$ 为四面体, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, M, P, R 分别为 OA, OB, OC 的中点, N, Q, S 依次分别为它们对棱的中点, 试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示 $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}$.

6. 设 M, N 为四边形 $ABCD$ 对边 AB 和 CD 的中点, 求证 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

7. 设 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 互相垂直, M 为任意一点, $\overrightarrow{MG} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MF} \perp \overrightarrow{OC}$, 求证 $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 2 \overrightarrow{MO}$.

8. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于 E , P 为任意一点, 求证 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4 \overrightarrow{PE}$.

9. 证明四面体中连接对棱中点的三条直线交于一点且互相等分(此点称为四面体的重心).

10. 设 A_1, A_2, A_3, A_4 为任意指定的四点, 任取一点 M_0 , 自点 M_0 起顺次作四点 M_1, M_2, M_3, M_4 使 M_i 和 M_{i-1} 关于 A_i 对称 ($i=1, 2, 3, 4$). 求证: 向量 $\overrightarrow{M_0 M_4}$ 与 M_0 的选择无关.

11. 设 $\mathbf{a} = (3, 5, -1), \mathbf{b} = (2, 2, 3), \mathbf{c} = (4, -1, -3)$, 试求 (1) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$; (2) $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$.

12. 已知 $A(-1, 1, 0), B(0, -1, 2)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 及其方向余弦.

13. 设 $\mathbf{a} = (2, -3, 5)$, 试求 $|\mathbf{a}|$ 以及与 $\mathbf{a}$ 方向相反的单位向量.

14. 已知 $|\mathbf{a}| = 10$, 方向角 $\alpha = \beta = \gamma \in (0, 90^\circ)$, 求 $\mathbf{a}$.

15. 已知 $|a|=2, |b|=1, a$ 与 b 间的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 试求 $a \cdot a$ 与 $(3a+2b) \cdot (3a-b)$.
16. 设 $a=(1,1,-4), b=(1,-2,2)$. 试求 $a \cdot b, a \times b$.
17. 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $a=(8,9,-12)$ 的方向取长为 34 的线段 AB , 试求点 B 的坐标.
18. 求以 $a=(1,-3,1)$ 和 $b=(2,-1,3)$ 为边的平行四边形的面积.
19. 若三角形的顶点是 $A(3,1,3), B(1,-1,2), C(3,3,1)$, 试求 $\triangle ABC$ 的面积.
20. 设 $|a|=10, |b|=2, a \cdot b=12$, 试求 $|a \times b|$.

§ 1.3 空间中的平面与直线

本节与 § 1.4 将讨论空间中基本几何图形的代数表示, 从平面、直线, 到常见的二次曲面.

1.3.1 空间中的平面及其方程

我们讨论平面的几种代数表示——平面的几种方程.

为推导平面方程, 在欧氏空间 R^3 中建立一个直角坐标系 $Oxyz$.

1. 平面的点法式方程

法线, 法向量 垂直于平面 π 的直线都称为 π 的法线; 平行于法线的任一非零向量都称为 π 的法向量.

由中学的几何知识知道, 给定一个非零向量 $n=(A, B, C)$, 另给一个不在 n 上的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则经过点 P_0 且与 n 垂直的平面 π 是惟一确定的(图 1.3.1). 我们来求这个平面 π 的方程.

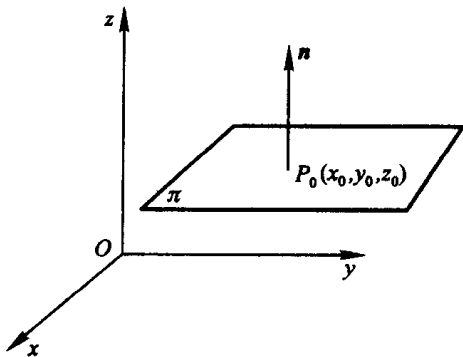


图 1.3.1

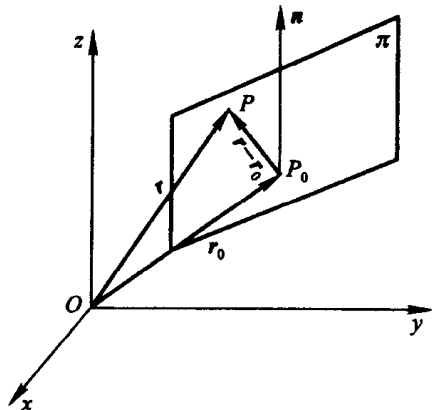


图 1.3.2

设 $P(x, y, z)$ 为平面 π 上的任一点, 记 $r = \overrightarrow{OP} = (x, y, z), r_0 = \overrightarrow{OP_0} =$

(x_0, y_0, z_0) , 见图 1.3.2. 据假设, π 与 $\mathbf{n}$ 垂直, 也就是, $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$, 故得到

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.3.1)$$

(1.3.1) 式是平面 π 上任一点 P 的坐标 (x, y, z) 所满足的方程, 亦即 π 的方程, 称它为 π 的点法式方程.

把点法式(1.3.1)写成坐标形式, 得到平面点法式方程的下述等价形式

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2. 平面的一般式方程

记 $D = -\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, 则平面的点法式方程化为

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1.3.2)$$

称(1.3.2)为平面 π 的一般式方程, 式中 A, B, C 恰好是 π 的法向量 $\mathbf{n}$ 的三个分量, 即 $\mathbf{n} = (A, B, C)$. 我们称 $\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ 为平面 π 的单位法向量.

现在考虑反面的问题: 当 A, B, C 不全为 0 时(亦即, $\mathbf{n}$ 不是 0 向量), 方程(1.3.2)是否代表一个平面呢? 回答是肯定的. 我们有

定理 1.3.1(平面的一般式方程) 任何三元一次方程(1.3.2), 其中系数 A, B, C 不全为 0, 都表示一个平面, 并以 (A, B, C) 为此平面的法向量.

证 不妨设 $A \neq 0$, 则点 $M_0 = (-\frac{D}{A}, 0, 0)$ 的坐标满足方程(1.3.2). 于是, 过点 M_0 , 以 (A, B, C) 为法向量所确定的平面方程就是(1.3.2). 这就是所需要证明的.

在方程(1.3.2)中, 系数 A, B, C, D 的某些值为 0 时, 方程代表一些特殊的平面.

- ① $A = 0, BCD \neq 0$: 平面 π 平行于 Ox 轴;
- ② $A = B = 0, CD \neq 0$: 平面 π 平行于 xOy 平面;
- ③ $A = B = D = 0, C \neq 0$: 平面 π 是 xOy 平面;
- ④ $D = 0$, 平面 π 通过原点.

我们并未列出所有特例, 其余特例请读者自行给出.

3. 平面的截距式方程

设 $ABCD \neq 0$, 则(1.3.2)式可改写为

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1, \quad (1.3.3)$$

称(1.3.3)为平面 π 的截距式方程, 其几何意义是明显的: 平面 π 与 Ox, Oy, Oz 轴分别交于点

$$\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right), \left(0, -\frac{D}{B}, 0\right), \left(0, 0, -\frac{D}{C}\right),$$

此三个交点到原点的距离(即 π 在三坐标轴的截距)分别为

$$-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C}.$$

平面的截距式一般写为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (1.3.4)$$

其中 a, b, c 不为 0, 见图 1.3.3.

4. 平面的法方程

给定平面 π 的单位法向量 $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 平面的点法式(1.3.1)可写成 $e \cdot (r - r_0) = 0$. 用坐标表示此内积

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

化简得

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (1.3.5)$$

其中 $p = e \cdot r_0 = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma$, 称(1.3.5)为平面 π 的法方程.

下面给出一些例子.

例 1 试求经过 Ox 轴与点 $M(1, 1, 1)$ 的平面方程.

解 因为所求的平面 π 经过 Ox 轴, 故可设 π 的方程为

$$By + Cz = 0.$$

以 $M(1, 1, 1)$ 代入上式, 得 $B + C = 0$, 从而 $B = -C$. 再将 $B = -C$ 代入上式, 并约去非零常数, 便得所求平面 π 的方程

$$y - z = 0.$$

例 2 已给不共线的三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 、 $M_3(x_3, y_3, z_3)$, 试求以此三点所确定的平面 π 的法向量.

解 设所求平面 π 的法向量 $n = (A, B, C)$. 依假设, $n \perp \overrightarrow{M_1 M_2}$, $n \perp \overrightarrow{M_1 M_3}$, 故得

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0.$$

由上述方程组可确定

$$\begin{aligned} & \frac{A}{(y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1)} \\ &= \frac{B}{(z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (z_3 - z_1)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

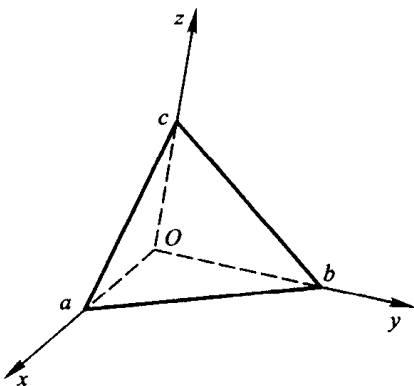


图 1.3.3

$$= \frac{C}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}.$$

于是可取 π 的法方向 $\mathbf{n}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = & ((y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1), \\ & (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (z_3 - z_1)(x_2 - x_1), \\ & (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

例 3 计算 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 到平面 π 的距离 δ .

解 设 π 的法方程为 (1.3.5), 其中 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 取作 P^* 在 π 上的投影, 见图 1.3.4, 于是 $\overrightarrow{P_0 P^*} \parallel \mathbf{e}$. 故

$$|\overrightarrow{P_0 P^*} \cdot \mathbf{e}| = |\overrightarrow{P_0 P^*}| |\mathbf{e}| \cos \theta = |\overrightarrow{P_0 P^*}| = \delta.$$

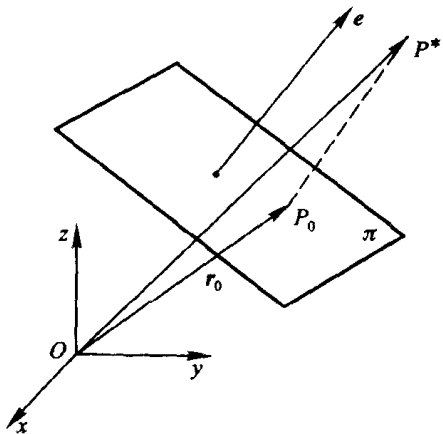


图 1.3.4

另一方面, 由方程 (1.3.5) 得

$$|\overrightarrow{P_0 P^*}| = |\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_0)| = |x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p|, \quad (1.3.7)$$

这就是 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 到平面 π 的距离 δ 公式, 其中

$$p = \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_0 = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma,$$

上式中的 x_0, y_0, z_0 由 $\overrightarrow{P_0 P^*} \parallel \mathbf{e}$ 与 $P_0 \in \pi$ 确定.

1.3.2 空间中的直线及其方程

平面解析几何中已经推导了平面直线的方程, 现在我们来研究空间直线的方程.

1. 直线的两点式方程

与平面情形类似, 过空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 决定一条直线

L , 此直线的方程可用向量方法求得.

设 $P(x, y, z)$ 为直线 L 上任意一点, 于是向量 $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_2P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在同一条直线上, 见图 1.3.5. 故

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \quad (1.3.8)$$

这就是直线 L 上任一点 P 的坐标 (x, y, z) 所满足的方程, 称为直线 L 的两点式方程.

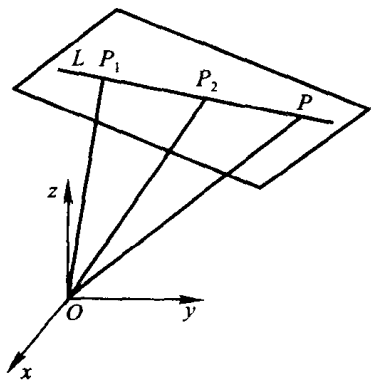


图 1.3.5

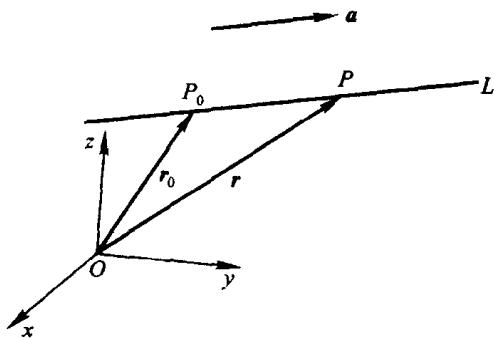


图 1.3.6

2. 直线的向量方程

给定一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 与一非零向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, 则可惟一地确定一条直线 L , 使 L 通过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 并且平行于向量 $\mathbf{a}$. 现在来确定直线 L 的方程.

设 $P(x, y, z)$ 为直线 L 上任意一点, 记 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$.

因为 $\overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{a}$, 故可得 $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{a}$, 或

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1.3.9)$$

其中 t 为参数, 每个参数值 t 确定直线 L 上一个点, 反之亦然. (1.3.9) 称为直线 L 的向量方程 (图 1.3.6).

我们称 $\mathbf{a}$ 为直线 L 的方向向量. 对于常数 $\alpha \neq 0$, 也称 $\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3$ 为直线 L 的方向数.

3. 直线的参数方程

在直线的向量方程 (1.3.9) 中分别代入向量 $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{a}$ 的坐标, 便得到

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1, \\ y = y_0 + ta_2, \\ z = z_0 + ta_3, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1.3.10)$$

称(1.3.10)为直线的参数方程(图 1.3.7), 图中 P_0 与 P 的参数分别为 $t_0 = 0$ 与 t .

4. 直线的对称方程

对于直线 L 的方向向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, 若 $a_1 a_2 a_3 \neq 0$, 则可将参数方程写为

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} = t,$$

并称

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (1.3.11)$$

为直线 L 的对称方程.

当 a_1, a_2, a_3 中有为 0 者, 我们约定对应的分子也为 0. 于是, 直接由(1.3.10)可得

① $a_1 = 0, a_2 a_3 \neq 0$: L 的参数式为

$$\begin{cases} x = x_0, \\ \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \end{cases}$$

代表 $x = x_0$ 平面上的直线.

② $a_1 = a_2 = 0, a_3 \neq 0$: L 的参数式为

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

代表 $x = x_0$ 与 $y = y_0$ 两平面的交线.

5. 直线的一般方程

直线是两个平面 π_1 与 π_2 的交线, 故可将两平面的一般方程联立, 就得到直线的一般方程(图 1.3.8)

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (1.3.12)$$

此直线的方向向量为 $\mathbf{a} = (B_1 C_2 - B_2 C_1, C_1 A_2 - C_2 A_1, A_1 B_2 - A_2 B_1)$.

直线的各种方程可以互化、灵活使用.

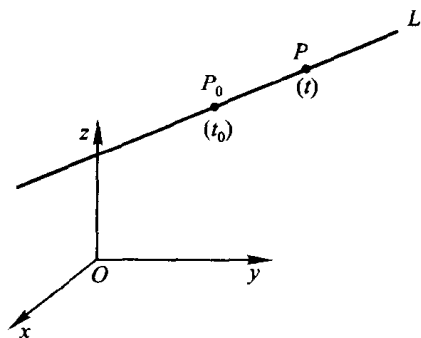


图 1.3.7

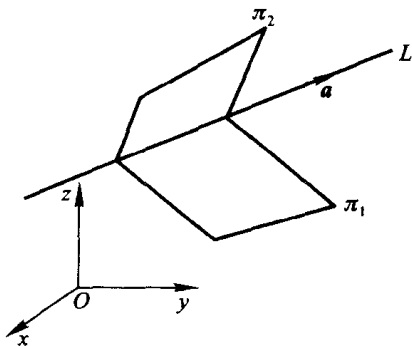


图 1.3.8

例 4 试将直线 L

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

化为对称方程.

解 把直线 L 看作两平面 $\pi_1: x + y + z - 3 = 0$ 与 $\pi_2: x + 2y + 3z - 6 = 0$ 的交线.

π_1 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$ 与 π_2 的法向量 $\mathbf{n}_2 = (1, 2, 3)$ 都垂直于直线 L , 故 $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ 是 L 的方向向量. 由公式(1.2.14)得到

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, -2, 1).$$

另一方面, 易见点 $P_0(1, 1, 1)$ 在 L 上, 因此可得到 L 的对称方程

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

例 5 设 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为两个不同的点, $k \neq -1$ 为常数.

(1) 试求由 P_1, P_2 两点所确定的直线方程;

(2) 若 $\overrightarrow{P_1P} = k\overrightarrow{PP_2}$, 试求 P 点的坐标.

解 对于(1), 过 P_1, P_2 两点的直线, 以 $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 为其方向向量, 故直线可写为对称方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

对于(2), 由 $\overrightarrow{P_1P} = k\overrightarrow{PP_2}$, 可得到上述关系式的坐标表示

$$x - x_1 = k(x_2 - x), y - y_1 = k(y_2 - y), z - z_1 = k(z_2 - z).$$

由此解得

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}, z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}. \quad (1.3.13)$$

上式称为线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的分比公式, 并称点 P 是分割线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的比值为 k 的点. 特别地, 当 $k=1$ 时, P 点恰好是线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的中点, 中点的坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (1.3.14)$$

1.3.3 平面与直线的关系

空间中的平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的关系都可以用它们的方程或坐标表示.

1. 平面与平面的关系

给定两个平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 与 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. 现在来观察 π_1 与 π_2 在空间中的位置关系.

π_1 与 π_2 的法向量分别为

$$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

考虑以下情况:

① π_1 与 π_2 平行

由于“ $\pi_1 // \pi_2$ ”当且仅当“ $\mathbf{n}_1 // \mathbf{n}_2$ ”, 也当且仅当“存在实数 $\alpha \neq 0$, 使得 $\mathbf{n}_2 = \alpha \mathbf{n}_1$ ”. 于是得到平面平行的条件是

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (1.3.15)$$

显然, 条件(1.3.15)是充分而且必要的.

这里我们注意到, 若 $A_2 = 0$, 则 $A_1 = 0$, 反之亦然; 对 B, C 也是如此.

特别地, π_1 与 π_2 重合, 当且仅当

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}. \quad (1.3.16)$$

② π_1 与 π_2 相交

当两平面 π_1 与 π_2 相交时, π_1 与 π_2 的法向量 $\mathbf{n}_1$ 与 $\mathbf{n}_2$ 之间的夹角 θ 就称为两平面 π_1 与 π_2 之间的夹角. 不难求得

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (1.3.17)$$

特别地, $\pi_1 \perp \pi_2$ 当且仅当

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (1.3.18)$$

定义 1.3.1 (平行平面束) 与已给平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 平行的任意平面都可写成

$$Ax + By + Cz + k = 0, \quad (1.3.19)$$

其中 k 为参数. 式(1.3.19)代表一族平面, 族中所有平面都与 π 平行, 故称它们为由 π 生成的平行平面束, 或平行平面族.

2. 平面与直线的关系

空间一平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 与一条直线 L

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

之间的关系讨论如下.

L 的方向向量 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 为

$$a = (B_1C_2 - B_2C_1, C_1A_2 - C_2A_1, A_1B_2 - A_2B_1). \quad (1.3.20)$$

取定一点 $P_0 \in L$, 令 $\overrightarrow{OP_0} = r_0$; 又记 L 上任意一点 $P(x, y, z) \in L$, 令 $\overrightarrow{OP} = r$. 于是 L 的向量方程为

$$r = r_0 + ta, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (1.3.21)$$

π 的法向量为 $n = (A, B, C)$. 取定一点 $P_1 \in \pi$, 令 $\overrightarrow{OP_1} = r_1$; 又记 π 上任意一点 $P \in \pi$, 令 $\overrightarrow{OP} = r$. 于是平面 π 的点法式为

$$n \cdot (r - r_1) = 0. \quad (1.3.22)$$

将(1.3.21)代入(1.3.22), 得到

$$n \cdot (r_0 - r_1) + tn \cdot a = 0. \quad (1.3.23)$$

这就是 L 与 π 的交点 P 的参数 t 所应满足的关系式. 现在可以分以下情形进行讨论.

① $n \cdot a = 0$, 且 $r_0 - r_1 \neq 0$;

此时 L 与 π 没有交点, 即 $L \parallel \pi$;

② $n \cdot a = 0$, 且 $n \cdot (r_0 - r_1) = 0$;

此时 L 与 π 有无穷多个交点, 即 L 在 π 上;

③ $n \cdot a \neq 0$;

此时方程(1.3.23)有惟一解, 即 L 与 π 有惟一交点 M , 设其参数为 t , 则 t 由(1.3.23)式解出

$$t = \frac{n \cdot (r_0 - r_1)}{n \cdot a}. \quad (1.3.24)$$

从以上讨论可知, 直线 L 与平面 π 在空间有三种位置关系:

① $L \parallel \pi$; ② $L \subset \pi$; ③ L 与 π 有惟一交点. 见图 1.3.9.

在直线与平面关系方面, 还有三个重要概念.

定义 1.3.2(直线与平面的夹角) 过直线 L 作平面 π' , 使得 $\pi' \perp \pi$, π' 与 π 的交线记为 L' , 并设直线 L' 与 L 的夹角为 φ . 我们称 φ 为直线 L 与平面 π 的夹角.

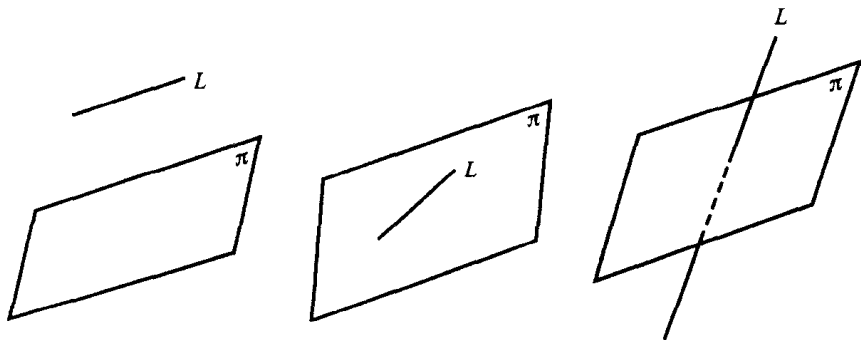


图 1.3.9

利用此概念,我们知道,在 $L // \pi$ 与 $L \subset \pi$ 两种情况下都有 $\varphi = 0$. 对于 L 与 π 有惟一交点 M_0 的情形,其间的夹角 φ 恰好与 $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{a}$ 间的夹角 θ 互为余角. 于是有

$$\sin \varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad (1.3.25)$$

其中 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 是 L 的方向向量, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 是 π 的法向量.

定义 1.3.3 (有轴平面束) 过直线 L 的所有平面所成的集合称为由 L 生成的有轴平面束,简称平面束. L 称为此平面束的轴(图 1.3.10).

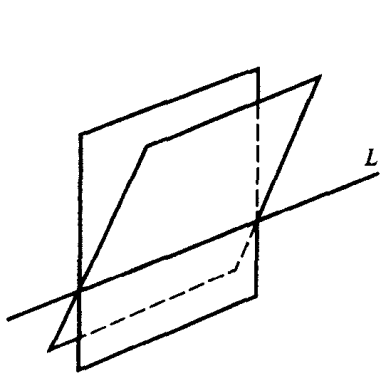


图 1.3.10

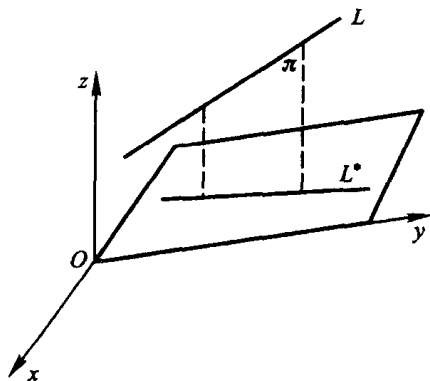


图 1.3.11

若直线 L 由一般方程给出

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

则有轴平面束中任一个平面 π 的方程是

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (1.3.26)$$

其中 $\lambda \in \mathbf{R}$ 是一个参数,它与平面束中的平面是对应的. 我们约定: $\lambda = 0$ 对应于

平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \lambda = \infty$ 对应于平面 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. 于是, λ 与平面束中的平面是一一对应的.

定义 1.3.4(垂直投影) 对于给定的直线 L , 过 L 作平行于 Oz 轴的平面 π , 记此 π 与 xOy 平面的交线为 L^* , 我们称 L^* 为 L 在 xOy 上的垂直投影(图 1.3.11).

当 L 的方程用一般式给出时, L^* 的方程按如下情形确定.

(i) 当 $C_2 \neq 0$ 时, L^* 的方程是

$$\begin{cases} (C_2A_1 - C_1A_2)x + (C_2B_1 - C_1B_2)y + (C_2D_1 - C_1D_2) = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

(ii) 当 $C_2 = 0, C_1 \neq 0$ 时, L^* 的方程是

$$\begin{cases} A_2x + B_2y + D_2 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

(iii) 当 $C_1 = C_2 = 0$ 时, L^* 退化成一个点, 就是 L 与 xOy 平面的交点.

同理, 可以定义 L 在 yOz 平面与 zOx 平面上的垂直投影.

3. 直线与直线的关系

设 L_1, L_2 为空间中的两条直线, 我们讨论它们之间的位置关系.

若 L_1 与 L_2 平行, 或 L_1 与 L_2 相交, 则它们必同属于一个平面, 此时称 L_1 与 L_2 共面.

然而, 空间两条直线可以既不平行又不相交, 它们不在同一个平面上, 此时称 L_1 与 L_2 为异面直线. 例如, 平行六面体的无公共点的棱就是异面直线. 我们重点讨论异面直线.

定义 1.3.5(公垂线) 设 L_1 与 L_2 为两条异面直线, 若直线 L 与 L_1, L_2 同时垂直、同时相交, 且分别与 L_1, L_2 相交于点 M_1, M_2 , 则我们称 L 为 L_1 与 L_2 的公垂线, 并且称 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 为公垂线的长.

公垂线长度的求法如下.

设 L_1 通过点 $M_1^0 = (x_1^0, y_1^0, z_1^0)$ 且其方向向量为 $\mathbf{a} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, 则其参数式为

$$L_1: \begin{cases} x_1 = x_1^0 + t_1 \alpha_1, \\ y_1 = y_1^0 + t_1 \beta_1, \\ z_1 = z_1^0 + t_1 \gamma_1; \end{cases}$$

同样设 L_2 通过点 $M_2^0 = (x_2^0, y_2^0, z_2^0)$ 且其方向向量为 $\mathbf{b} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, 则其参数式为

$$L_2: \begin{cases} x_2 = x_2^0 + t_2 \alpha_2, \\ y_2 = y_2^0 + t_2 \beta_2, \\ z_2 = z_2^0 + t_2 \gamma_2. \end{cases}$$

设公垂线 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的两个垂足 $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1, M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$ 的参数分别为 t_1, t_2 , 于是,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_2} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ &= (x_2^0 - x_1^0 + t_2 \alpha_2 - t_1 \alpha_1, y_2^0 - y_1^0 + t_2 \beta_2 - \\ &\quad t_1 \beta_1, z_2^0 - z_1^0 + t_2 \gamma_2 - t_1 \gamma_1). \end{aligned}$$

再由 $\overrightarrow{M_1 M_2} \perp \mathbf{a}, \overrightarrow{M_1 M_2} \perp \mathbf{b}$ 得到

$$\begin{cases} \alpha_1(x_2^0 - x_1^0 + t_2 \alpha_2 - t_1 \alpha_1) + \beta_1(y_2^0 - y_1^0 + t_2 \beta_2 - t_1 \beta_1) + \gamma_1(z_2^0 - z_1^0 + t_2 \gamma_2 - t_1 \gamma_1) = 0, \\ \alpha_2(x_2^0 - x_1^0 + t_2 \alpha_2 - t_1 \alpha_1) + \beta_2(y_2^0 - y_1^0 + t_2 \beta_2 - t_1 \beta_1) + \gamma_2(z_2^0 - z_1^0 + t_2 \gamma_2 - t_1 \gamma_1) = 0, \end{cases}$$

从上式解出 t_1, t_2 , 得到点 M_1, M_2 的参数坐标, 从而求得公垂线的长度与方程.

例 6 对于例 4 中的直线 L , 求通过 L 且与 Ox 轴平行的平面方程 (图 1.3.12).

解 设所求的平面为 π , 它通过

$$\pi_1: x + y + z - 3 = 0$$

与

$$\pi_2: x + 2y + 3z - 6 = 0$$

的交线, 即 L , 故 π 属于由 π_1 与 π_2 生成的有轴平面束. 又设 π 的参数为 k , 故其方程为

$$x + y + z - 3 + k(x + 2y + 3z - 6) = 0,$$

即

$$(1+k)x + (1+2k)y + (1+3k)z + 18k = 0.$$

因 π 平行于 Ox 轴, 故 $1+k=0$. 于是由 $k=-1$ 得

到 π 的方程为

$$y + 2z - 3 = 0.$$

例 7 试求两异面直线

$$L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

与

$$L_2: \frac{x+6}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-1}$$

的公垂线的两垂足 M_1, M_2 的坐标, 并求两异面直线之间的最短距离, 以及公垂线的方程.

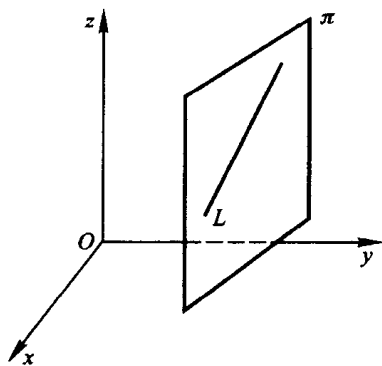


图 1.3.12

解 先写出 L_1 、 L_2 的参数方程

$$L_1: \begin{cases} x_1 = 3 + t_1, \\ y_1 = 4 + t_1, \\ z_1 = -1 - t_1, \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x_2 = -6 + 2t_2, \\ y_2 = -5 + 4t_2, \\ z_2 = 1 - t_2. \end{cases}$$

由于 $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$, 故

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (2t_2 - t_1 - 9, 4t_2 - t_1 - 9, -t_2 + t_1 + 2).$$

再由 $\overrightarrow{M_1 M_2} \perp \boldsymbol{a} = (1, 1, -1)$ 、同时由 $\overrightarrow{M_1 M_2} \perp \boldsymbol{b} = (2, 4, -1)$ 得

$$1 \cdot (2t_2 - t_1 - 9) + 1 \cdot (4t_2 - t_1 - 9) + (-1) \cdot (-t_2 + t_1 + 2) = 0,$$

$$2 \cdot (2t_2 - t_1 - 9) + 4 \cdot (4t_2 - t_1 - 9) + (-1) \cdot (-t_2 + t_1 + 2) = 0,$$

整理后得

$$7t_2 - 3t_1 - 20 = 0,$$

$$3t_2 - t_1 - 8 = 0,$$

解出 $t_2 = 2, t_1 = -2$, 故 $M_1(1, 2, 1)$ 、 $M_2(-2, 3, -1)$ 即为所求的二垂足. 于是,

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (-3, 1, -2),$$

从而 $|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{14}$ 便是两直线之间的最短距离, 亦即公垂线之长. 最后, 由两点式求得公垂线方程

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

例 8 已给点 $P_0(1, 0, 2)$, 试求点 P_0 关于

(1) 平面 $\pi: x = y$ 的对称点 $P'(x', y', z')$;

(2) 直线 $L: x = y = z$ 的对称点 $P''(x'', y'', z'')$.

解 (1) 如图 1.3.13, 过 P_0 作平面 π 的垂线 l , $l \perp \pi$, 并与 π 相交于点 M_0 . 于是, 直线 l 的方向向量就是 π 的法向量 $\boldsymbol{n} = (1, -1, 0)$. 从而, l 的参数式是

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -t, \\ z = 2. \end{cases}$$

将此代入平面 π 的方程 $x = y$ 得到参数 t 的值 $t = -\frac{1}{2}$, 这便是点 M_0 所对应的参数, 所以

$M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$ 为 l 与 π 的交点.

但是 P' 与 P_0 关于 π 对称, 故 M_0 是线段 $\overrightarrow{P_0 P'}$ 的中点, 由线段中点的公式(1.3.14)得

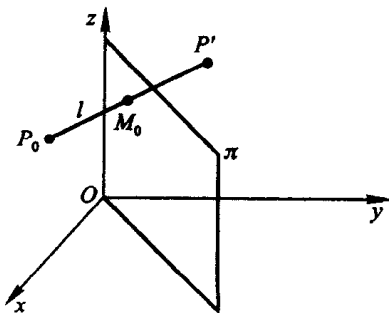


图 1.3.13

$$\frac{1+x'}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{0+y'}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2+z'}{2} = 2,$$

从而 $P'(0, 1, 2)$.

(2) 如图 1.3.14, 过 P_0 作垂直于直线 L 的平面 π^* , $\pi^* \perp L$, 并与 L 相交于点 M^* , 平面 π^* 的法向量就是直线 L 的方向向量 $(1, 1, 1)$. 于是 π^* 的点法式方程为 $x + y + z - 3 = 0$.

以 $x = y = z$ 代入平面 π^* 的方程, 可得 $M^*(1, 1, 1)$. 又因 M^* 是线段 $P_0 P''$ 的中点, 故据中点公式立得 $P''(1, 2, 0)$.

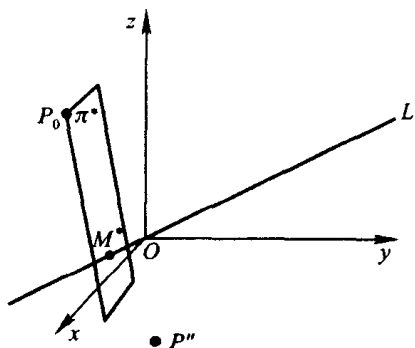


图 1.3.14

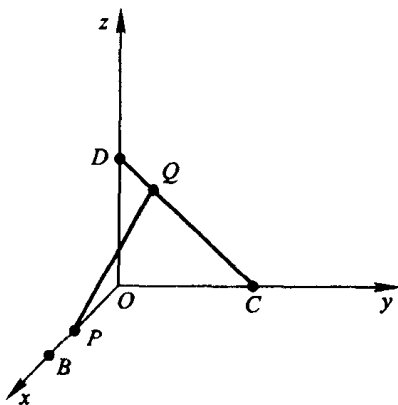


图 1.3.15

例 9 已给空间四点 $O(0, 0, 0)$ 、 $B(1, 0, 0)$ 、 $C(0, 1, 0)$ 、 $D(0, 0, 1)$. 在直线 OB 上任取一点 P , 相应地也在 CD 上取一点 Q , 使得

$$\frac{OP}{BP} = \frac{CQ}{DQ}.$$

当点 P 在 OB 上任意移动时, 试求动直线 PQ 的轨迹的方程(图 1.3.15).

解 设 $P(\lambda, 0, 0)$ 、 $Q(0, \mu, \nu)$, 则

$$\frac{OP}{BP} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \frac{CQ}{QD} = -\frac{CQ}{DQ} = -\frac{OP}{BP} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

利用分比公式, 得

$$\mu = \frac{1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cdot 0}{1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda}} = 1 - \lambda; \quad \nu = \frac{0 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cdot 1}{1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda}} = \lambda.$$

从而 $P(\lambda, 0, 0)$ 、 $Q(0, 1 - \lambda, \lambda)$. 于是, 直线 PQ 的方程为

$$\begin{cases} x = \lambda + t\lambda, \\ y = t(\lambda - 1), \\ z = -t\lambda. \end{cases}$$

由此得 $x + y = \lambda$, $\frac{y+z}{z} = \frac{1}{\lambda}$. 消去 λ , 使得 PQ 的轨迹方程

$$(x+y)(y+z) = z.$$

例 10 试求直线

$$L: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

在平面 $\pi^*: x + 2y - z = 0$ 上的投影直线 L' 的方程.

解 利用有轴平面束概念, 可设平面 π' 的方程为

$$2x - y + z - 1 + k(x + y - z + 1) = 0.$$

此平面的法向量 $\mathbf{n} = (2+k, k-1, 1-k)$ 与平面 π^* 的法向量 $\mathbf{n}^* = (1, 2, -1)$ 垂直, 故

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^* = (2+k, k-1, 1-k) \cdot (1, 2, -1) = 0.$$

解出 $k = \frac{1}{4}$ 后, 得 π' 的方程

$$3x - y + z - 1 = 0.$$

从而知 L' 的方程为

$$\begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0, \\ x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

例 11 设直线 L 通过点 $P(2, -1, 2)$, 且与两条直线

$$L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1}, \quad L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-3}$$

同时相交, 试求此直线的方程.

解 我们只要求出通过 P 点与直线 L_1 的平面 π_1 的方程, 并且求出通过 P 点与直线 L_2 的平面 π_2 的方程, 就可求出 π_1 与 π_2 的交线, 即为直线 L .

显然, L_1 与 L_2 为异面直线.

取 $P_1(-1, 1, -1) \in L_1$, 于是, $\overrightarrow{P_1P} = (3, -2, 3)$ 平行于 π_1 . 再由 L_1 的方向向量为 $(1, 0, 1)$, 从而 π_1 的法方向为 $(3, -2, 3) \times (1, 0, 1) = (-2, 0, 2)$.

这样, 平面 π_1 的方程为

$$x - z = 0.$$

同理, $P_2(2, 1, -3) \in L_2$, 于是, $\overrightarrow{P_2P} = (0, -2, 5)$ 平行于 π_2 . 再由 L_2 的方向向量为 $(1, 1, -3)$, 从而 π_2 的法方向为 $(0, -2, 5) \times (1, 1, -3) = (1, 5, 2)$

这样, 平面 π_2 的方程为

$$x + 5y + 2z = 1.$$

最后, 得 L 的方程为

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ x + 5y + 2z = 1. \end{cases}$$

习 题

- 求过定点 (a, b, c) 且分别与 (1) 与 yOz 平面; (2) 过 Ox 轴的平面方程.
- 求下列平面的方程:
 - 经过三点 $(0, 0, 0), (2, 1, 1), (3, -2, 3)$;
 - 经过三点 $(1, 1, 0), (1, 2, 1), (-2, 2, -1)$.
- 求过两定点且与已知向量平行的平面方程.
- 经过点 $(2, -1, 1)$ 和 Oy 轴作一平面, 求此平面的方程.
- 经过三点 $(2, 1, -3), (6, -1, 4), (4, 2, 1)$ 作一平面, 求此平面的方程. 三点 $(4, 5, -1), (1, -1, -4), (-1, -5, -6)$ 能否确定惟一的平面?
- 求平面 $n \cdot r + D = 0$: (1) 过原点; (2) 平行于 Ox 轴; (3) 经过 Ox 轴; (4) 平行于 xOy 平面的充要条件.
- 试求下列各对点所确定的直线方程
 - $(3, 2, -1), (2, -3, 4)$.
 - $(1, -2, 1), (3, 1, -1)$.
- 把下列直线化成对称方程
 - $\begin{cases} 4x - 5y + 3z - 3 = 0, \\ 4x - 5y + z + 9 = 0; \end{cases}$
 - $\begin{cases} x + 2y + 6z - 5 = 0, \\ 3x + 2y - 10z - 7 = 0. \end{cases}$
- 求证直线 $\begin{cases} 2y + z = 0, \\ 3y + 4z = 7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 5y - 2z = 3, \\ 4y + 11z = 44 \end{cases}$ 是平行的.
- 当系数 B 与 D 取何值时, 才能使直线

$$\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0, \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$$

落在 xOy 平面内?

- 一平面经过直线 $\begin{cases} 3x - 4y + 5z - 10 = 0, \\ 2x + 2y - 3z - 4 = 0, \end{cases}$ 并与直线 $x = 2y = 3z$ 平行, 试求其方程.

- 求证两直线

$$L_1: \begin{cases} 2x - y + 3z + 3 = 0, \\ x + 10y - 21 = 0; \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} 2x - y = 0, \\ 7x + z - 6 = 0 \end{cases}$$

有一公共点, 找出这点的坐标和包含这两直线的平面.

- 确定 λ 和 μ 的值, 使得三个平面:

$$\pi_1: 2x - y + 3z + 1 = 0,$$

$$\pi_2: x + 2y - z + \lambda = 0,$$

$$\pi_3: x + \mu y - 6z + 10 = 0$$

- (1) 相交于一点;
 (2) 相交于一条直线;
 (3) 两两相交于三条平行直线.

14. 求证:自原点到三平面 $-x+y+z=a$, $x-y+z=a$ 和 $x+y-z=a$ ($a>0$) 的距离相等.

15. 已知两相交平面 $2x-y+3z-5=0$ 和 $3x+2y-z-3=0$. 问

- (1) 含原点的二面角是锐角还是钝角?
 (2) 点 $(2, -1, 3)$ 及原点在这两个平面所成的同一个二面角内, 或在相邻的二面角内, 或在对棱二面角内?

16. 平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 与坐标轴交于三点, 试证: 这三点所成的三角形面积为 $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$.

17. 求证 $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz = 0$ 表示一对相交平面. 将其化成向量形式, 再求其所成的角.

18. 求两平行平面 $ax+by+cz+d_1=0$ 和 $ax+by+cz+d_2=0$ ($a^2+b^2+c^2 \neq 0, d_1^2 + d_2^2 \neq 0$) 间的距离.

19. 试求直线

$$\begin{cases} 4x-5y+3z-3=0, \\ 4x-5y+z+9=0 \end{cases}$$

到平面 $4x-5y=0$ 的距离.

20. 已知两个相交平面, 由此两平面外的任一定点向这两平面作垂线, 试证它们垂足的连线必和此两平面的交线垂直.

21. 已给点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(-1, 2, 3)$, 并且点 M 把线段 AB 分成 $1:2$ 的比, 求点 M 的坐标.

22. 试求点 $(-3, 2, 1)$ 关于点 $(2, 1, -1)$ 的对称点.

23. 求出连接点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的线段被平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ (法方程) 所分成的比值.

24. 已给直线 $L: r=r_0+ta$ 和点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 试求点 P_1 到直线 L 的距离.

25. 试求下列的点到直线的距离

(1) $P_1(6, 6, -1)$, $L: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$.

(2) $P_1(5, 4, 2)$, $L: \frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

26. 在两个相交平面 $x+y+z=2$ 和 $x+2y-z=1$ 的交线上, 求与两个平行平面 $x+2y+z-1=0$ 与 $x+2y+z-3=0$ 等距离的点的坐标.

27. 一直线通过点 $(3, -1, 2)$, 并和两直线

$$L_1: \begin{cases} x=2z-1, \\ y=z+3; \end{cases} \quad L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

都垂直,找出这直线的方程.

28. 求下列各对平面之间的角:

(1) $2x + y - 2z - 9 = 0, x - 2y + 2z = 0$;

(2) $x - y - 4z = 0, 3y - 2z + 7 = 0$.

29. 一平面经过两点 $(0, -1, 0)$ 和 $(0, 0, -1)$, 并与平面 $y + z = 7$ 之间的角度为 $\frac{2}{3}\pi$, 求此平面的方程.

30. 求两直线

$$L_1: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - 2y + z - 1 = 0; \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

之间的角.

31. 试求直线 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ 在平面 $x + 2y + z - 6 = 0$ 上的投影.

32. 已给直线 $L: \frac{x-3}{4} = \frac{y-8}{5} = \frac{z-12}{7}$ 和平面 $\pi: x + 2y + 3z - 22 = 0$, 试求

(1) L 与 π 的交点 M_0 的坐标,

(2) 直线 L 在平面 π 上的投影.

33. 假设三个平面两两相交, 试证通过每一交线而与第三个平面垂直的平面是共轴面.

34. 求出下列各对直线之间的最短距离:

(1) $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad L_2: \frac{x+6}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-1};$

(2) $L_1: \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}, \quad L_2: \frac{x+7}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1};$

(3) $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-11}{-2} = \frac{z-4}{1}, \quad L_2: \frac{x-6}{7} = \frac{y+7}{-6} = \frac{z}{1}.$

35. 试求两直线

$$L_1: \begin{cases} x - 4z - 1 = 0, \\ x - 4y - 9 = 0; \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x - 2z - 4 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

之间的最短距离, 公垂线方程及两个垂足的坐标.

36. 已知四面体的四个面的方程为 $y + z = 0, z + x = 0, x + y = 0, x + y + z = a$, 求三对相对棱之间的最短距离, 三条公垂线的方程, 并证明三条公垂线交于一点.

§ 1.4 二次曲面

本节主要介绍空间 $\mathbf{R}^3$ 中常见的二次曲面. 重点研究柱面、锥面、旋转面的生成及其代数方程, 并且给出空间中二次曲面的分类及其标准方程.

1.4.1 空间曲面

在空间直角坐标系下, 如果代数方程 $F(x, y, z) = 0$ 与曲面 Σ 有这样的关

系: 曲面 Σ 上任一点的坐标 (x, y, z) 都满足方程 $F(x, y, z) = 0$; 反之, 如果满足方程 $F(x, y, z) = 0$ 的三个有序数组 (x, y, z) 作为一个点的坐标时, 该点一定在曲面 Σ 上, 则我们称 $F(x, y, z) = 0$ 为曲面 Σ 的方程, 并称曲面 Σ 为函数关系 $F(x, y, z) = 0$ 的几何图形.

于是, 曲面 Σ 作为几何图形, $F(x, y, z) = 0$ 作为函数关系, 就这样有机地联系起来了.

记 $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ 为空间中点的坐标. 关系式

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1.4.1)$$

称为曲面 Σ 的隐式方程; 如果从关系式 $F(x, y, z) = 0$ 中可解出某个变量, 则

$$z = f(x, y), \quad \text{或} \quad y = g(x, z), \quad \text{或} \quad x = h(y, z) \quad (1.4.2)$$

称为曲面 Σ 的显式方程.

上节中讨论的平面是最简单的曲面, 平面的一般式方程中 $F(x, y, z) = 0$ 是 x, y, z 的一次式

$$F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0.$$

空间中二次曲面方程的一般形式为

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned}$$

曲面 Σ 方程也可以表示成参数式: 如果 Σ 上任一点的坐标 (x, y, z) 都可表示成两个变量 u, v 的函数

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ z = h(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D; \quad (1.4.3)$$

反之, 对于任意的 $(u, v) \in D$, 由 (1.4.3) 所确定的点都在曲面 Σ 上, 则称 (1.4.3) 为曲面 Σ 的参数方程, 并称 u, v 为曲面的两个参数.

例如, 球面的参数方程可写成 (图 1.4.1)

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \theta, \\ y = R \cos \varphi \sin \theta, \\ z = R \sin \varphi, \end{cases}$$

其中 $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 为两个参数. θ 与 φ 有明显的几何意义: 对球面上任一点 $P(x, y, z)$, 过 P 作 xOy 平面的垂线, 垂足为 $P'(x, y, 0)$, 则 $\overrightarrow{OP}$ 与 Ox 轴的夹角为 θ , $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OP'}$ 的夹角为 φ , R 为球面半径.

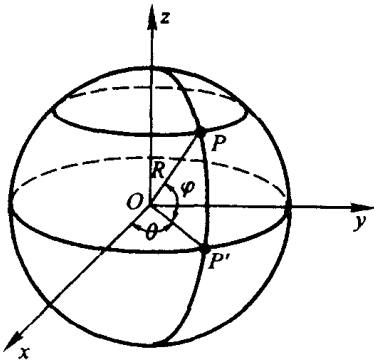


图 1.4.1

将两个曲面的方程联立起来, 表示它们的交

线

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (1.4.4)$$

(1.4.4)式一般表示一条空间曲线 l .

例如, 曲面 Σ 与 xOy 平面的交线

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

表示 $z = 0$ 上的一条平面曲线. 特别提醒一下: 在平面 $\mathbf{R}^2$ 的直角坐标系中, $F(x, y) = 0$ 代表一条平面曲线, 但在空间 $\mathbf{R}^3$ 的直角坐标系中, $F(x, y) = 0$ 却代表一个曲面.

如果曲线 l 上任一点的坐标 (x, y, z) 都可表示成一个变量的函数

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t), \end{cases} \quad t \in I, \quad (1.4.5)$$

这里 I 是有限区间或无穷区间; 反之, 对任意 $t \in I$, 由 (1.4.5) 所确定的点 (x, y, z) 都在曲线 l 上, 则称式 (1.4.5) 为曲线 l 的参数方程, 并称 t 为曲线的参数. 上节中所考虑的直线的参数方程就是这里 (1.4.5) 的特例.

1.4.2 柱面及其方程

柱面是最常见的空间曲面.

定义 1.4.1 (柱面) 在空间 $\mathbf{R}^3$ 中, 给定一条直线 L 与一条曲线 Γ . 设动直线 l 沿曲线 Γ 并平行于直线 L 运动, 所得到的图形称为柱面. 曲线 Γ 称为柱面的准线, 动直线 l 称为柱面的母线 (图 1.4.2).

现在我们来求柱面 Σ 的方程. 设直线 L 的方向向量为

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

在柱面 Σ 上任取一点 $P(x, y, z)$, 过 P 点作一条母线 l , 与准线 Γ 交于点 $P'(x', y', z')$.

我们讨论两种情况.

1. 准线 Γ 由参数式 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ 给出

分三个步骤进行.

① 确定母线 l 与准线 Γ 的交点 P' 所满足的关系

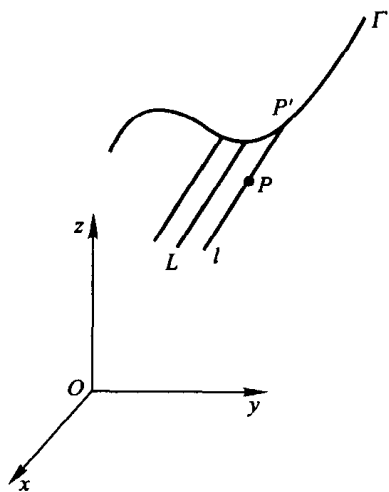


图 1.4.2

因 $P' \in \Gamma$, 故

$$x' = f(t'), \quad y' = g(t'), \quad z' = h(t'), \quad t' \in I. \quad (1.4.6)$$

其中 t' 是 P' 所对应 Γ 上的参数.

② 确定母线 l 与给定方向 $\mathbf{a}$ 平行所满足的关系

由 $\overrightarrow{PP'} \parallel \mathbf{a}$, 得

$$\frac{x - x'}{a_1} = \frac{y - y'}{a_2} = \frac{z - z'}{a_3} \equiv v. \quad (1.4.7)$$

③ 整理、化简

将(1.4.6)代入(1.4.7), 得

$$\frac{x - f(t')}{a_1} = \frac{y - g(t')}{a_2} = \frac{z - h(t')}{a_3} = v.$$

于是, $x = f(t') + va_1, y = g(t') + va_2, z = h(t') + va_3$. 由于 P' 是过 Σ 上任一点 P 所作母线 l 与准线 Γ 的交点, 故 t' 可以当作柱面 Σ 的另外一个参数, 记为 u . 这样就得到 Σ 的参数方程 $x = f(u) + va_1, y = g(u) + va_2, z = h(u) + va_3$.

我们归纳为下述定理:

定理 1.4.1 (柱面方程) 以 $\Gamma: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ 为准线, 母线平行于方向向量为 $\mathbf{a}$

$= (a_1, a_2, a_3)$ 的直线 L 的柱面 Σ 的方程是

$$\begin{cases} x = f(u) + va_1, \\ y = g(u) + va_2, \\ z = h(u) + va_3, \end{cases} \quad u, v \text{ 为参数}. \quad (1.4.8)$$

推论 1.4.1 在定理 1.4.1 的假设下, 柱面 Σ 的向量方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{l}(u) + v\mathbf{a},$$

其中 u, v 为参数, $\mathbf{l}(u) = (f(u), g(u), h(u)), \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

2. 准线 Γ 由一般式 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ **给出**

也分三个步骤进行.

① 确定母线 l 与准线 Γ 的交点 P' 所满足的关系

因 $P' \in \Gamma$, 故

$$\begin{cases} F(x', y', z') = 0, \\ G(x', y', z') = 0. \end{cases} \quad (1.4.9)$$

② 确定母线 l 与给定方向 $\mathbf{a}$ 平行所满足的关系

由 $\overrightarrow{PP'} \parallel \mathbf{a}$, 得

$$\frac{x-x'}{a_1} = \frac{y-y'}{a_2} = \frac{z-z'}{a_3} = -t.$$

由此得

$$x' = x + a_1 t, \quad y' = y + a_2 t, \quad z' = z + a_3 t. \quad (1.4.10)$$

③ 整理、化简

将(1.4.10)代入(1.4.9),得

$$\begin{cases} F(x + a_1 t, y + a_2 t, z + a_3 t) = 0, \\ G(x + a_1 t, y + a_2 t, z + a_3 t) = 0, \end{cases}$$

由上式消去 t , 使得柱面 Σ 所满足的方程. 为此, 可建立如下定理

定理 1.4.2 (柱面方程) 以 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于方向

向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 的直线 L 的柱面 Σ 的方程为由

$$\begin{cases} F(x + a_1 t, y + a_2 t, z + a_3 t) = 0, \\ G(x + a_1 t, y + a_2 t, z + a_3 t) = 0 \end{cases} \quad (1.4.11)$$

消去 t 所得的方程.

推论 1.4.2 以 $\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于 Oz 轴的柱面 Σ 的方

程是

$$f(x, y) = 0. \quad (1.4.12)$$

同理, 当 $\Gamma: \begin{cases} g(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases}$ $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ 时, 柱面 Σ 的方程是

$$g(y, z) = 0. \quad (1.4.13)$$

而当 $\Gamma: \begin{cases} h(z, x) = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $\mathbf{a} = (0, 1, 0)$ 时, 柱面 Σ 的方程是

$$h(z, x) = 0. \quad (1.4.14)$$

推论的证明留作习题.

例 1 求准线为 $\Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ 母线平行于 Oz 轴的柱面 Σ 的方程.

解 由推论 1.4.4 即可得所求柱面 Σ 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

这是一个椭圆柱面(见图 1.4.3(a)). 其特例 $a = b$ 时, 是圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$.

类似地, 可得双曲柱面的方程(见图 1.4.3(b))为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

抛物柱面的方程(见图 1.4.3(c))为

$$y^2 - a\rho x = 0.$$

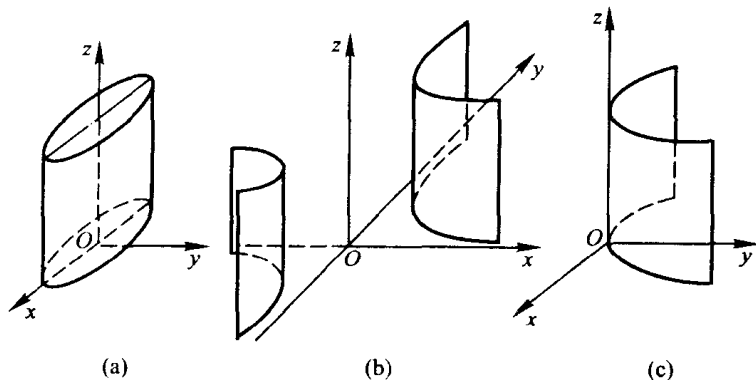


图 1.4.3

例 2 试求以 $\Gamma: \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 4y^2 - 2z^2 + x - 3y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于 $L:$

$x - y = -2z$ 的柱面 Σ 的方程.

解 由 L 的方程知其方向向量为 $\mathbf{a}' = (1, -1, 2)$. 以 $P(x, y, z)$ 表示 Σ 上任一点, 过 P 点作母线 l , 并以 $P'(x', y', z')$ 表示 l 与 Γ 的交点. 于是

① 由 $P' \in \Gamma$, 得

$$\begin{cases} x' + y' + z' = 0, \\ 4y'^2 - 2z'^2 + x' - 3y' - 3z' - 2 = 0. \end{cases} \quad (1.4.15)$$

② 由 $\overrightarrow{PP'} \parallel \mathbf{a}$, 得

$$\begin{cases} x' = x + t, \\ y' = y - t, \\ z' = z + 2t. \end{cases} \quad (1.4.16)$$

③ 把(1.4.16)代入(1.4.15), 得

$$\begin{cases} (x + t) + (y - t) - (z + 2t) = 0, \\ 4(y - t)^2 - 2(z + 2t)^2 + (x + t) - 3(y - t) - 3(z + 2t) - 2 = 0. \end{cases} \quad (1.4.17)$$

由此求得 $t = \frac{1}{2}(x + y - z)$ 后代入(1.4.17)的第二式, 化简得

$$x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - 2yz + 2xz + 4y + 2z + 2 = 0,$$

即为所求柱面 Σ 的方程.

本节中还要引入一个重要概念——投影柱面.

定义 1.4.2(投影柱面) 给定一个平面 π 与不在 π 上的一条空间曲线 Γ , 以 Γ 为准线, 作母线与 π 的法向量 n 平行的柱面 Σ , 称此柱面 Σ 为 Γ 在平面 π 上的投影柱面(图 1.4.4).

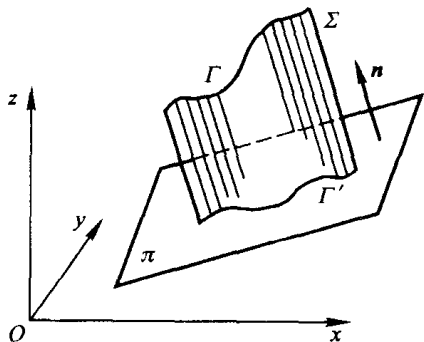


图 1.4.4

投影柱面 Σ 与平面 π 的交线 Γ' 称为 Γ 在平面 π 上的投影曲线, 简称投影. 投影的方程就是由 π 的方程与投影柱面 Σ 的方程联立而成的方程组.

例 3 设

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^2 + y^2 - 2z = 0 \end{cases}$$

是球与椭圆抛物面的交线. 试求 Γ 在 $z=0$ 平面上的投影柱面与投影.

解 先求投影柱面 Σ 的方程. 由于 $\pi: z=0$, 故 $n=(0,0,1)$. 于是 Σ 的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z+t)^2 = 3, \\ x^2 + y^2 - 2(z+t) = 0. \end{cases}$$

从而求得

$$z+t=1 \quad \text{或} \quad z+t=-3.$$

由 $z+t=1$ 代入 Σ 的方程, 得

$$x^2 + y^2 - 2 = 0,$$

这就是投影柱面 Σ 的方程.

至于 $z+t=-3$ 代入 Σ 的方程, 得 $x^2 + y^2 + 6 = 0$ 不合题意. 最后, 得 Γ 在 $z=0$ 上的投影是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 0. \end{cases}$$

1.4.3 锥面及其方程

锥面也是最常见的空间曲面.

定义 1.4.3(锥面) 给定一条空间曲线 Γ 与不在 Γ 上的一点 P_0 . 由 P_0 与 Γ 上的点的连线所构成的曲面 Σ 称为锥面. Γ 称为锥面的准线, P_0 称为锥面的顶点, P_0 与 Γ 上的点的连线称为锥面的母线(图 1.4.5).

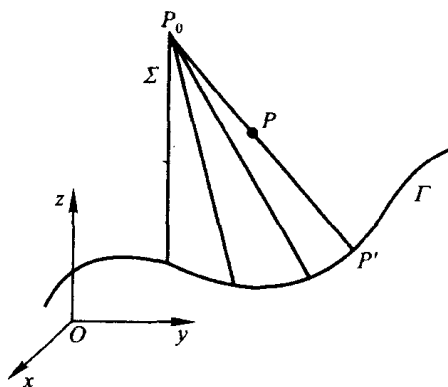


图 1.4.5

现在我们来推导锥面 Σ 的方程.

设锥面 Σ 的顶点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$. 在锥面 Σ 上任取一点 $P(x, y, z)$, 联结 P_0 与 P , 得一条母线 l . 设 l 与 Γ 交于点 $P'(x', y', z')$.

我们讨论两种情况.

1. 准线 Γ 由一般式方程
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{给出}$$

分三个步骤进行.

① 确定母线 l 与准线 Γ 的交点 P' 所满足的关系

因 $P' \in \Gamma$, 故

$$\begin{cases} F(x', y', z') = 0, \\ G(x', y', z') = 0. \end{cases} \quad (1.4.18)$$

② 确定 P, P_0, P' 共线所满足的关系

由 P, P_0, P' 三点共线, 得

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{z' - z_0}{z - z_0} \equiv t. \quad (1.4.19)$$

由此得

$$x' = x_0 + t(x - x_0), \quad y' = y_0 + t(y - y_0), \quad z' = z_0 + t(z - z_0). \quad (1.4.20)$$

③ 整理、化简

将(1.4.20)代入(1.4.19), 得

$$\begin{cases} F(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)) = 0, \\ G(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)) = 0, \end{cases} \quad (1.4.21)$$

由上式消去 t , 使得锥面 Σ 所满足的方程. 为此, 可建立如下定理:

定理 1.4.3 (锥面方程) 以 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 为准线, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为顶点的锥面方程是由 (1.4.21) 消去 t 所得到的表示式 $H(x, y, z) = 0$.

推论 1.4.3 以 $\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = c, c \neq 0 \end{cases}$ 为准线, 以 $P_0(0, 0, 0)$ 为顶点的锥面 Σ 的方程是

$$f\left(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}\right) = 0. \quad (1.4.22)$$

2. 准线 Γ 由参数式
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$
 给出

也分三个步骤进行.

① 确定母线 l 与准线 Γ 的交点 P' 所满足的关系

因 $P' \in \Gamma$, 故

$$x' = f(t'), \quad y' = g(t'), \quad z' = h(t'), \quad t' \in I. \quad (1.4.23)$$

其中 t' 是 P' 所对应 Γ 上的参数.

② 确定 P, P_0, P' 共线所满足的关系

由 P, P_0, P' 三点共线, 得

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{z' - z_0}{z - z_0} \equiv t. \quad (1.4.24)$$

由此得

$$x' = x_0 + t(x - x_0), \quad y' = y_0 + t(y - y_0), \quad z' = z_0 + t(z - z_0). \quad (1.4.25)$$

③ 整理、化简

将 (1.4.25) 代入 (1.4.23), 得

$$x_0 + t(x - x_0) = f(t'), \quad y_0 + t(y - y_0) = g(t'), \quad z_0 + t(z - z_0) = h(t').$$

从中消去 t, t' , 便得到锥面 Σ 的方程.

例 4 试求以 $\Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{c^2} \\ z = 1 \end{cases}$ 为准线, 以原点 $(0, 0, 0)$ 为顶点的锥面方程.

这里 $a > 0, b > 0, c > 0$.

解 利用推论 1.4.6, 取 $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0, z = 1$. 由 (1.4.22) 得

$$\frac{\left(\frac{1 \cdot x}{z}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{1 \cdot y}{z}\right)^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

化简得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (1.4.26)$$

上式代表的是二次锥面(图 1.4.6).

例 5 若 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = c, c \neq 0 \end{cases}$ 为准线, $(0,0,0)$ 为顶点, 求锥面 Σ 的方程.

利用例 4 类似的方法得到

$$x^2 + y^2 - \frac{R^2}{c^2} z^2 = 0,$$

称为圆锥面. 圆锥面上任意一条母线与 Oz 轴之间的夹角 α 恒为常值, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 且 $\tan \alpha = \frac{R}{|c|}$, α 称为圆锥面的半顶角(图 1.4.6). 于是, 圆锥面的方程可写为

$$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0. \quad (1.4.27)$$

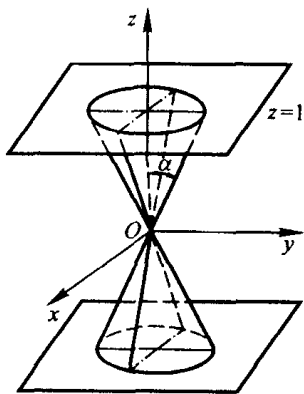


图 1.4.6

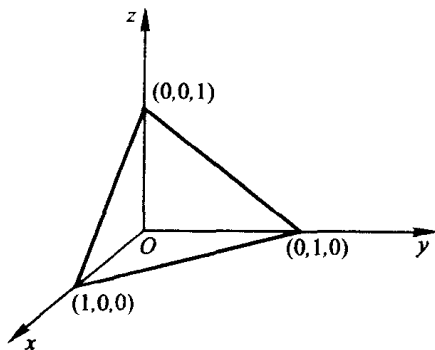


图 1.4.7

例 6 试求以原点为顶点、包含三个坐标轴的圆锥面的方程(图 1.4.7).

解 由对称性, 知道以原点 $O(0,0,0)$ 为顶点、包含三个坐标轴的圆锥面共有 4 个, 设为 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, 并设 Σ_1 是其中一个分支包含三个坐标轴的正向, 另一个分支包含三个坐标轴的负向的那个对顶圆锥面. 我们只要求出 Σ_1 , 其余三个可用类似方法求得.

首先, 设法求 Σ_1 的一条准线 Γ .

因为三个坐标轴就是 Σ_1 的三条母线, 所以就可取三个点 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ 在这条准线 Γ 上, 于是就可取 Γ 为在这三个点决定的平面 $x + y + z$

=1 上. 另一方面, 由圆锥面的对称性, 可取 Γ 为该平面上的圆周

$$\Gamma: \begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases} \quad (1.4.28)$$

问题化为: 求以 Γ 为准线、 $(0,0,0)$ 为顶点的圆锥面.

如前, 假设 Γ 上的任一点为 $P(x, y, z)$, 过 P 点作一条母线 l , 且 l 与 Γ 的交点为 $P'(x', y', z')$. 于是, 由 $P' \in \Gamma$ 得

$$\begin{cases} x'+y'+z'=1, \\ x'^2+y'^2+z'^2=1. \end{cases} \quad (1.4.29)$$

其次, 由 P, O, P' 共线, 得

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = t.$$

从而 $x' = xt, y' = yt, z' = zt$. 以此代入 (1.4.29), 得

$$\begin{cases} tx + ty + tz - 1 = 0, \\ t^2 x^2 + t^2 y^2 + t^2 z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

解出 $t = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$. 消去参数后得到

$$\Sigma_1: xy + yz + zx = 0.$$

类似地, 可得

$$\Sigma_2: xy - yz + zx = 0,$$

$$\Sigma_3: xy + yz - zx = 0,$$

$$\Sigma_4: -xy + yz + zx = 0.$$

1.4.4 旋转面及其方程

常见空间曲面还有一种, 就是旋转面.

定义 1.4.4 (旋转面) 给定一条曲线 Γ 与一直线 L , 曲线 Γ 绕直线 L 旋转所成的曲面称为旋转面. L 称为旋转面的轴, 或简称旋转轴; Γ 称为旋转面的一条母线.

旋转面的经线 过旋转面 Σ 的旋转轴 L 的任一平面与旋转面的交线称为 Σ 的经线.

旋转面的纬线 过旋转面 Σ 的母线上的任一点 Q 绕旋转轴 L 旋转所得的圆周称为 Σ 的纬线.

下面来推导旋转面的方程.

为简单起见, 我们假设母线 Γ 为坐标面上的平面曲线, 旋转轴 L 为 Oz 轴, 由此旋转所得的旋转面为 Σ (图 1.4.8).

取 Σ 上的任一点 $P(x, y, z)$, 过 P 点作平面 π , 使得 π 垂直于 Oz 轴, 且与

母线 Γ 交于 $P'(x', y', z')$, 与 Oz 轴交于 $P_0(0, 0, z)$. 此时, 平面 π 的方程为 $z = z'$.

现在讨论两种情况.

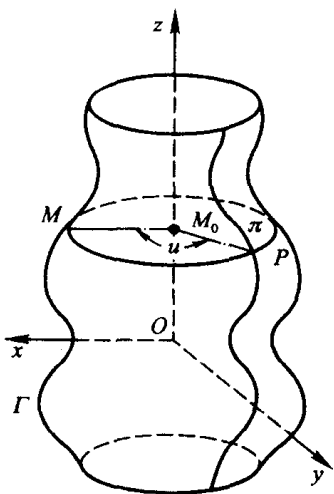


图 1.4.8

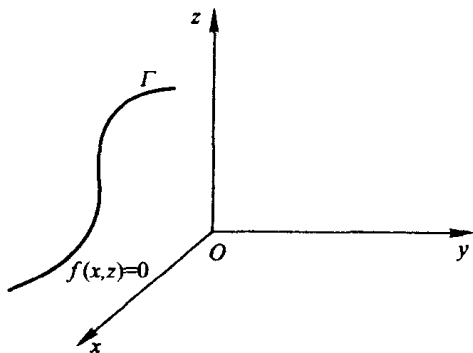


图 1.4.9

1. 母线 Γ 由 xOz 平面上的曲线 $\begin{cases} f(x, z) = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ 给出, 旋转轴 L 为 Oz 轴 (见图 1.4.9)

分三个步骤进行.

① 确定 π 与母线 Γ 的交点 P' 所满足的关系

因 $P' \in \Gamma$, 故

$$\begin{cases} f(x', z') = 0, \\ y' = 0. \end{cases} \quad (1.4.30)$$

② 确定 P, P_0, P' 坐标所满足的关系

由于 P, P' 在以 P_0 为圆心的圆周上, 且 $z = z'$, 故得

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2,$$

再由 $y' = 0$, 得

$$x^2 + y^2 = x'^2. \quad (1.4.31)$$

③ 整理、化简

将 (1.4.31) 代入 (1.4.30), 并由 $z' = z$ 得

$$\begin{aligned} f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0; \quad \text{或} \quad f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0; \\ \text{或} \quad f(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \end{aligned} \quad (1.4.32)$$

这便是旋转面 Σ 所满足的方程. 于是, 可建立如下定理

定理 1.4.4(旋转面方程) 以 $\Gamma: \begin{cases} f(x, z) = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ 为母线, 以 Oz 轴为旋转轴的旋转面方程由(1.4.32)给出.

类似地, 以 $\Gamma: \begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 为母线, 以 Ox 轴为旋转轴的旋转面方程为

$$f(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0; \quad \text{或} \quad f(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0; \\ \text{或} \quad f(x, -\sqrt{y^2 + z^2}) = 0. \quad (1.4.33)$$

值得注意的是, 上述公式中的 $\pm$ 号的选取, 要取决于 $f(x, z) = 0$ 中所允许的符号.

2. 母线 Γ 由参数式 $\begin{cases} x = f(v) \quad (f(v) > 0), \\ y = 0, \\ z = g(v) \end{cases}$ 给出, 旋转轴 L 为 Oz 轴

也分三个步骤进行.

① 确定 π 与母线 Γ 的交点 P' 所满足的关系

因 $P' \in \Gamma$, 故

$$x' = f(v'), \quad y' = 0, \quad z' = g(v'). \quad (1.4.34)$$

其中 v' 是 P' 所对应的 Γ 上的参数.

② 确定 P, P_0, P' 所满足的关系

由于 P, P' 在以 P_0 为心的圆周上, 且 $z' = z$, 得

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \equiv r^2.$$

再由 $y' = 0$ 与 $x'^2 + y'^2 \equiv r^2$, 得 $x' \equiv r, z' = z$, 代入(1.4.34)有

$$r = f(v'), \quad y' = 0, \quad z = g(v'). \quad (1.4.35)$$

③ 整理、化简

取 $P(x, y, z)$ 的极坐标形式

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u, \quad z = z, \quad (1.4.36)$$

将(1.4.35)代入(1.4.36)式, 得

$$x = f(v') \cos u, \quad y = f(v') \sin u, \quad z = g(v'),$$

因 P' 也是任意的, 故可去掉“'”号, 最后得

$$\begin{cases} x = f(v) \cos u, \\ y = f(v) \sin u, \\ z = g(v), \end{cases} \quad (1.4.37)$$

这就是旋转面 Σ 的参数方程.

同理可求得在母线 Γ 由参数式 $\begin{cases} x = f(v), \\ y = 0, \\ z = g(v) \quad (g(v) > 0) \end{cases}$ 给出时, 旋转轴 L 为

Ox 轴的旋转面 Σ 的参数方程

$$\begin{cases} x = f(v), \\ y = f(v)\cos u, \\ z = g(v)\sin u. \end{cases} \quad (1.4.38)$$

例 7 试求 Oz 轴绕直线 $L: x=y=z$ 旋转所产生的旋转面 Σ 的方程(见图 1.4.10).

解 显然, Oz 轴是一条母线 $\Gamma: \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$ 旋转轴为 $L: \begin{cases} x=z, \\ y=z. \end{cases}$ 记 Σ 上的任一点 $P(x, y, z)$, 过 P 点作平面 π 与旋转轴 L 垂直, π 与母线 Γ 交于点 $P'(x', y', z')$, 与旋转轴交于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

按照求旋转面方程的方法, 首先, π 与 Γ 的交点 $P'(x', y', z')$ 满足

$$x' = 0, y' = 0.$$

其次, P, P' 在以 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为心的圆周上. 此圆周位于平面 π 中. 由于 $\pi \perp L$, 故 π 的法向量为 $n = (1, 1, 1)$, 且 π 的方程为

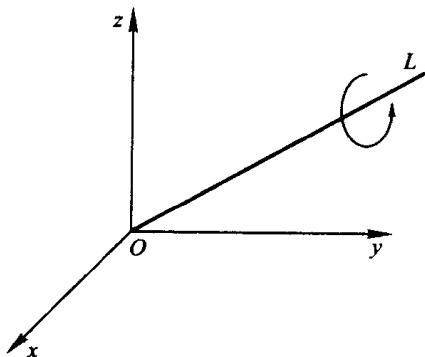


图 1.4.10

$$x + y + z + d = 0.$$

于是, 由 P, P', P_0 都在 π 上, 得到

$$x + y + z + d = 0,$$

$$x' + y' + z' + d = 0,$$

$$x_0 + y_0 + z_0 + d = 0.$$

再由 $P_0 \in L$ 得 $x_0 = y_0 = z_0$; 由 $P' \in Oz$ 得 $x' = y' = 0$, 故

$$x + y + z - 3x_0 = 0,$$

所以

$$x_0 = \frac{x + y + z}{3}.$$

利用 $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0P'}$ 得

$$(x - x_0)^2 + (y - x_0)^2 + (z - x_0)^2 = 6x_0^2.$$

将 $x_0 = \frac{x+y+z}{3}$ 代入上式, 化简后即得旋转面 Σ 的方程

$$xy + yz + zx = 0.$$

1.4.5 直纹面

定义 1.4.5(直纹面) 由依赖于一个参数 u 的一族直线 l_u 所产生的曲面 S , 使得对每个 u , 都有 $l_u \in S$, 并且 S 上的每一点也都在直线族 l_u 中的某一条直线上, 则称 S 为直纹面. 直纹面上的每一条直线称为母线.

1. 双曲抛物面

定理 1.4.5(双曲抛物面方程) 形如

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (1.4.39)$$

的曲面 Σ 是直纹面, 称为双曲抛物面.

证 事实上, 方程(1.4.39)可写为

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2u, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{u}, \end{cases} \quad (1.4.40)$$

其中 u 为参数, 对应于每个 u , (1.4.40) 代表 Σ 上的一条直线, $\mu_u = (a, -b, 2u)$ 是其方向向量, 因此(1.4.40)是曲面 Σ 上对应于参数 u 的直线族.

另一方面, Σ 上的任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 必定在直线族(1.4.40)的某一条直线上. 因为, 若 $P(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, 则

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 2z_0,$$

将左边分解后得

$$\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = 2u \frac{z_0}{u}.$$

如果 $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} = 0$, 则 $P(x_0, y_0, z_0)$ 在对应于参数 $u = 0$ 的直线 l_0 上.

如果 $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}$ 与 $\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}$ 不全为 0, 例如, $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \neq 0$, 则取

$$u = \frac{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}},$$

于是, P 便在直线 l_u 上.

由此可得到: 双曲抛物面(1.4.39)上的两族母线分别为

$$u \text{ 族: } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2u, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{u}, \end{cases} \quad (1.4.41)$$

且 $(a, -b, 2u)$ 为族中 l_u 的方向向量;

$$v \text{ 族: } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{v}, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2v, \end{cases} \quad (1.4.42)$$

且 $(a, b, 2v)$ 为族中 l_v 的方向向量.

这两族直线族还有如下性质:(1) 同族的两条母线不共面;(2) 异族的两条母线必共面.(其他性质从略)

2. 单叶双曲面

定理 1.4.6(单叶双曲面方程) 形如

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.4.43)$$

的曲面 Σ 是直纹面, 称为单叶双曲面.

其证明与定理 1.4.8 相同.

同样可得到: 单叶双曲面(1.4.43)上的两族母线分别为

$$u \text{ 族: } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u \left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{u} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad (1.4.44)$$

且 $\left(\frac{1}{bc} \left(u - \frac{1}{u}\right), \frac{2}{ac}, \frac{1}{ab} \left(u + \frac{1}{u}\right)\right)$ 为族中 l_u 的方向向量;

$$v \text{ 族: } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{v} \left(1 + \frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad (1.4.45)$$

且 $\left(\frac{1}{bc} \left(v - \frac{1}{v}\right), -\frac{2}{ac}, \frac{1}{ab} \left(v + \frac{1}{v}\right)\right)$ 为族中 l_v 的方向向量.

这两族直线族也有如下性质:(1) 同族的两条母线不共面;(2) 异族的两条母线必共面.(其他性质从略)

例 8 设 L_1, L_2 是两条异面直线, L 为它们的公垂线. 试求 L_2 绕 L 旋转而成的旋转面 π 的方程.

解 直线 $\overrightarrow{PQ}$ 的方程为

$$\frac{x-2am}{-2am} = \frac{y}{2bm} = \frac{z-2cm^2}{-4cm^2}.$$

写成一般式,得

$$\begin{cases} -bx + 2abm = ay \\ 2cm^2y = -b(z - 2cm^2), \end{cases}$$

解出 $m = \frac{bx + ay}{2ab}$. 代入第二个方程就得到所求的曲面方程

$$c(b^2x^2 - a^2y^2) - 2a^2b^2z = 0,$$

这是双曲抛物面,写成标准形式为

$$\frac{\frac{x^2}{a^2}}{\frac{c}{b^2}} - \frac{\frac{y^2}{b^2}}{\frac{c}{a^2}} = 2z.$$

1.4.6 常见二次曲面的分类

一、柱面

椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0$ (图 1.4.3, (a)); 当 $a = b$ 时是圆柱面 (图 1.4.12).

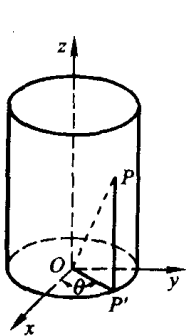


图 1.4.12

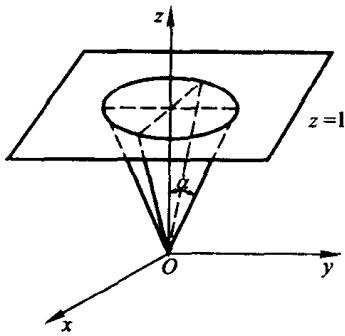


图 1.4.13

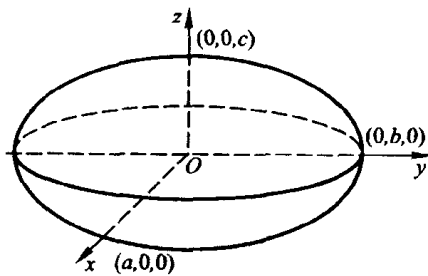


图 1.4.14

双曲柱面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0$ (图 1.4.3(b)).

抛物柱面

$$x^2 = \pm 2py,$$

其中 $p > 0$ (图 1.4.3(c)).

二、锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

其中 $a, b, c \neq 0$; 当 $a = b = c$ 时是圆锥面 (图 1.4.13).

三、椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

其中 $a, b, c \neq 0$ (图 1.4.14); 当 $a = b = c$ 时是球面; 当 a, b, c 中有两个相等时, 是旋转椭球面.

四、椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

其中 $z > 0$ (图 1.4.15); 当 $a = b$ 时, 是旋转椭圆抛物面.

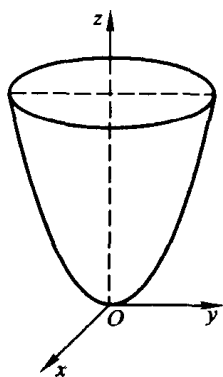


图 1.4.15

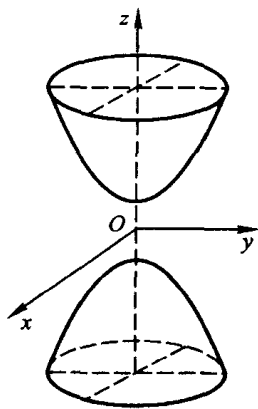


图 1.4.16

五、双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

其中 $a, b, c \neq 0$ (图 1.4.16); 当 $a = b$ 时是旋转双叶双曲面.

六、单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

其中 $a, b, c \neq 0$ (图 1.4.17); 当 $b = c$ 时是旋转单叶双曲面.

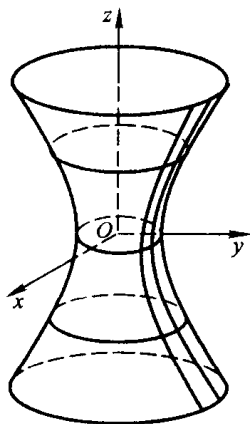


图 1.4.17

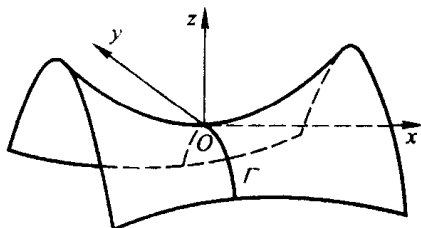


图 1.4.18

七、双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

其图形呈马鞍形(图 1.4.18).

二次曲面是指曲面方程 $F(x, y, z) = 0$ 中的函数 F 为 x, y, z 的二次式. 二次曲面都可以通过适当的坐标变换 (§ 6.2.3) 化为以下几种之一: 柱面、锥面、椭球面、椭圆抛物面、双曲抛物面、单叶双曲面、双叶双曲面.

常用的坐标变换有:

1. 直角坐标系间的变换

设三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中有两个坐标系 $Oxyz$ 与 $O'x'y'z'$, 它们的单位向量分别为 e_1, e_2, e_3 与 e'_1, e'_2, e'_3 , 并且 e'_1, e'_2, e'_3 在坐标系 $Oxyz$ 中的方向余弦为

$$e'_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}); \quad e'_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}); \quad e'_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

O' 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为 $O'(x_0, y_0, z_0)$. 点 P 在坐标系 $Oxyz$ 与坐标系 $O'x'y'z'$ 中的坐标分别为 (x, y, z) 与 (x', y', z') (见图 1.4.19), 则

$$\begin{cases} x' = a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) + a_{13}(z - z_0), \\ y' = a_{21}(x - x_0) + a_{22}(y - y_0) + a_{23}(z - z_0), \\ z' = a_{31}(x - x_0) + a_{32}(y - y_0) + a_{33}(z - z_0); \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_0, \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_0, \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_0. \end{cases}$$

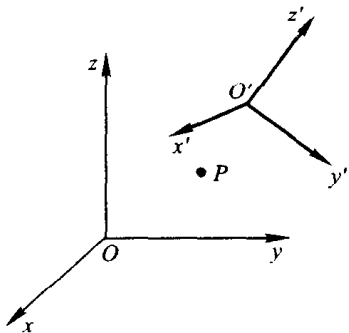


图 1.4.19

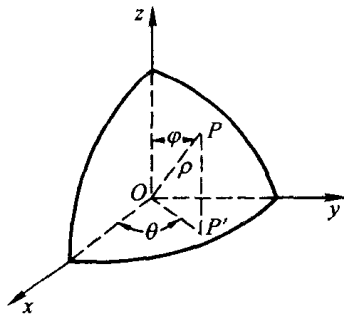


图 1.4.20

2. 直角坐标系与球面坐标系间的变换

设 P 的直角坐标为 (x, y, z) , 球面坐标为 (ρ, φ, θ) , 则

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases} \quad (\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi).$$

3. 直角坐标系与柱面坐标系间的变换

设 P 的直角坐标为 (x, y, z) , 柱面坐标为 (r, θ, z) , 则

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

还有一些其他的坐标系与坐标变换, 今后还会遇到.

习 题

1. 已知准线 $\Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{4} - z^2 = 0, \\ y = 3, \end{cases}$ 母线平行 Oy 轴, 试求柱面的方程.
2. 已知准线 $\Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1, \\ z = 2, \end{cases}$ 母线平行 Oz 轴, 试求柱面的方程.
3. 已知准线 $\Gamma: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$ 母线平行于直线 $x = y = z$, 试求柱面的方程.
4. 已知准线 $\Gamma: \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^3 + y^3 + z^3 - 1 = 0, \end{cases}$ 试求母线平行于直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 的柱面方程.
5. 求以三条直线 $x = y = z$, $\begin{cases} y = x + 1, \\ z = x + 2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y = x - 2, \\ z = x + 1 \end{cases}$ 为母线的圆柱面的方程.
6. 试求通过点 $M_0(2, -1, 1)$, 且以直线 $x = 3t + 1, y = 2t - 2, z = t + 2$ 为轴的圆柱面的

方程.

7. 求与直线 $x=y=z$ 距离等于 $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 的点的轨迹.

8. 设平面 $\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 与三个坐标轴分别交于 A, B, C 三点, 过此三点作一圆, 试求以原点为顶点, 此圆为准线的锥面方程.

9. 求平面 $2x+y-z=0$ 与锥面 $4x^2-3y^2+2z^2=0$ 的相交直线.

10. 求以 $P_0(3, 2, 1)$ 为顶点, 以

$$\Gamma: \begin{cases} x-y+z=0, \\ x^2+2y^2-z^2-4=0 \end{cases}$$

为准线的锥面方程.

11. 求以原点为顶点, 分别以下列曲线为准线的锥面方程:

$$(1) \Gamma: \begin{cases} y^2+z^2=4, \\ x=1; \end{cases} \quad (2) \Gamma: \begin{cases} x^2-\frac{y^2}{4}=1, \\ z=-5; \end{cases}$$

$$(3) \Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-4=0, \\ x+y+z=1; \end{cases} \quad (4) \Gamma: \begin{cases} x^2-y^2=2z, \\ x+y+2z-3=0; \end{cases}$$

$$(5) \Gamma: \begin{cases} x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z. \end{cases}$$

12. 自原点到球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 所作切线, 必产生直圆锥面. 试证明之.

13. 求以直线 $x=y=z$ 为轴线, 且过直线 $2x=3y=-5z$ 的直圆锥面的方程.

14. 试证方程

$$x^2+2y^2+z^2-4yz-6zx-2x+8y-2z+9=0$$

代表顶点为 $(1, -2, 0)$ 的锥面.

15. 求直线 $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ 绕直线 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3}$ 旋转而成的旋转面的方程.

16. 在空间中, 设 L 为过原点 $O(0, 0, 0)$ 与 $A(1, 1, 1)$ 的直线, 直线 l 为 $x=1, y=0$. 试求直线 l 绕直线 L 旋转而成的旋转面的方程.

17. 求抛物线

$$\begin{cases} y^2=2ax & (a>0), \\ z=0 \end{cases}$$

绕下列直线旋转所生成的旋转面方程:

(1) 抛物线的对称轴; (2) 抛物线在顶点的切线.

18. 求以 Ox 轴为轴, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x=my (a>b>0)$ 为母线所产生的旋转面的方程.

19. 求悬链线 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}})$ (即 $y = a \cosh \frac{z}{a}$), $z=0$ 绕 Ox 轴旋转所产生的旋转面, 且

作其图.

20. 设母线为 $y^2 = 2z, x = 0$, 分别求以 Oy 轴和 Oz 轴为旋转轴的旋转面的方程.

21. 试求双曲线 $\begin{cases} xy = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕它渐近线旋转所生成的旋转面的方程.

22. 试证双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 通过直线

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2.$$

23. λ 是参数, 直线族 $\begin{cases} y = 4\lambda, \\ \lambda y - x = 0 \end{cases}$ 能生成什么样的曲面?

24. 已知两椭圆

$$\Gamma_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c \end{cases} \quad \text{和} \quad \Gamma_2: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = -c, \end{cases}$$

将 Γ_1 上离心角为 $t - \alpha$ 的点和 Γ_2 上离心角为 $t + \alpha$ 的点用直线相连接, 试证此族直线组成一个单叶双曲面.

25. 已知一个实圆

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p \quad (p < R, \cos \gamma \neq 0), \end{cases}$$

试求此圆在 xOy 面上的投影, 并证明它是一个实椭圆.

26. 试求下列曲线在三坐标面上的投影柱面

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 25, x^2 + 4y^2 - z^2 = 0;$

(2) $x^2 + y^2 - z - 1 = 0, x^2 - y^2 - z + 1 = 0.$

27. 试证单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的任一条母线在 xOy 平面上的投影必与 xOy 平面上腰椭圆相切.

28. 作出 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $\Sigma_2: x^2 + y^2 = ax$ 的交线在第一卦限内的图形, 并求此曲线在 xOy 平面上的投影曲线(第一卦限内点的坐标满足 $x > 0, y > 0, z > 0$).

29. 证明:

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \\ z^2 = 2xy \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影是两条平行线段;

(2) $\begin{cases} (x+a)^2 - z^2 = a^2, \\ (x-a)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ 在 yOz 面上的投影是双纽线.

30. 已知平面 $ax + by + cz = 0$ ($abc \neq 0$) 与锥面 $xy + yz + xz = 0$ 的交线是两条互相垂直的直线, 证明 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

31. 试决定 m 的值, 使平面 $x - mz = 0$ 与单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 相交, 试问: 何时交线为椭圆? 何时交线为双曲线?

32. 椭球面 $3x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 10$ 与平面 $x + y + z = 1$ 相交成一椭圆, 求此椭圆的中心和

两个半轴之长.

33. 确定 λ 的值, 使方程 $x^2 - 2xy + \lambda z^2 = 0$ 表示旋转锥面, 并求旋转轴.

34. 求证 $\begin{cases} xy + yz + zx = a^2, \\ x + y + z = a \end{cases}$ 表示圆, 并求圆的半径.

§ 1.5 行 列 式

行列式在高等数学中有重要的地位和广泛的应用.

1.5.1 问题的提出

一个熟悉的问题引导我们考虑“行列式”, 那就是在中学代数教程中学习的线性代数方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$

用消去法可得到它的解

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

如果我们用记号 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ 分别表示三个数

$$\begin{aligned} a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} &= \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ b_1 a_{22} - b_2 a_{12} &= \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \\ b_2 a_{11} - b_1 a_{21} &= \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

那么, 解就可以写成

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

我们称 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ 为“二阶行列式”.

再回忆二次曲面的讨论中, 三元二次函数的一般表示式是

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ &\quad + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

其中 x, y, z 是曲面上任一点的直角坐标. 当我们研究曲面性质时, 只须注意上式中 x, y, z 的系数. 经过坐标变换, 一次项的系数可以化为 0, 为此, 我们只须研究不含一次项的二次式 F , 并把 F 中的二次项写成对称的形式:

$F(x, y, z) =$
 $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{21}yx + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{31}zx + a_{32}zy + a_{33}z^2,$
 把系数表示成如下形式的“行列式”:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

为研究二次式,只须先对上述行列式的性质进行研究.此外,在实际问题中,经常会遇到比3更高的“高维空间”,例如在3维空间中讨论随时间运动的物体时,将出现需要用4个自变量 x, y, z, t 表示的“4维问题”.还会出现用 n 个自变量表示的高维问题,等等.对于 n 大于3的维数,已经不再有空间直观的几何图形,寻找新的代数方法就显得非常重要了.

例如,对于 n 维空间中的曲面(称为 n 维超曲面),就可以抽象地考虑其系数所成的 n 阶“行列式”

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这些例子都引导出一个新的概念——行列式.

1.5.2 行列式的定义及性质

1. 行列式的定义

定义 1.5.1(行列式) 设有 n^2 个数(实数或复数) a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 排成下列阵式

$$d_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.5.1)$$

称 d_n 为 n 阶行列式,它的“值”(在下面定义1.5.2中给出)是一个数,其中第 i 横排元素, $[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$ ($i = 1, 2, \dots, m$),称为 d_n 的“第 i 行”;而其第

j 竖排元素, $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ ($j = 1, 2, \dots, n$),称为它的“第 j 列”; a_{ij} 称为 d_n 的元素,下

标中的 i, j 分别表示该元素所在的行与列,并称 a_{ij} 为行列式 d_n 的 (i, j) 元素.

设 a_{ij} 为行列式 d_n 的 (i, j) 元素,将 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的元素划去,剩下含有 $(n-1)^2$ 个元素、按原顺序排列所成的 $n-1$ 阶行列式,称为 a_{ij} 的余子

式,记为 $\tilde{A}_{ij}$. 将余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 得到的式子称为 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij} , 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \tilde{A}_{ij}$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5.2)$$

行列式(1.5.1)中的 $a_{ii}, i=1,2,\cdots,n$, 称为 d_n 的对角元素. 对角元素所在的位置称为 d_n 的主对角线. 若主对角线下方(或上方)的元素全为 0, 则称 d_n 为上(或下)三角形行列式.

定义 1.5.2(行列式的值) 行列式的值是按归纳方式定义的.

1 阶行列式 d_1 的“值”定义为: $d_1 = a_{11}$

n 阶($n \geq 2$)行列式的“值”等于它的第一行元素分别与它们的代数余子式乘积的和, 即

$$d_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}. \quad (1.5.3)$$

由定义, 当 $n=2$ 时, d_2 的值为

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(1.5.3)式也称为行列式关于第一行的展开式. 例如, 3 阶行列式为

$$d_3 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

再将二阶行列式的展开式代入, 便得三阶行列式的展开式.

例 1 按行列式的递推定义,有

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

上式右边第一个 3 阶行列式中的第一行全为 0, 故这个 3 阶行列式等于 0. 对第二个行列式继续降阶, 得

$$d = (-2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 16.$$

例 2 计算下述三角形行列式的值

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由定义 1.5.1, 我们有

$$d = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & & \\ \vdots & & \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

利用行列式的定义计算行列式的值, 只是在行列式阶数不太高, 或对某些特殊行列式才可行. 对于一般的行列式用定义计算的工作量是很大的, 例如一个 6 阶行列式完全展开以后, 就有 720 项. 为了给出计算行列式的简便方法, 我们先来讨论行列式的性质.

定义 1.5.3(行列式的转置) 我们称行列式

$$d_n^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.5.4)$$

为由(1.5.1)定义的行列式 d_n 的转置行列式. 行列式 d_n 的第 (i, j) 元素 a_{ij} 变为转置行列式 d_n^T 的第 (j, i) 元素, 而 d_n 的第 i 行变为 d_n^T 的第 i 列.

2. 行列式的重要性质

性质 1 行列式与它的转置行列式的值相等.

性质 2 对调行列式中两行(或两列)的位置, 行列式的值只改变符号.

例如, 对调第 i 行与第 j 行对应元素的位置, 而其余元素位置不变, 则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

上式中 $1 \leq i < j \leq n$.

上述两条性质对于 2 阶与 3 阶行列式可以直接验证, 对于高阶行列式则可用归纳法证明, 我们把证明留给读者.

性质 3 将行列式的某一行(或列)的元素均乘以数 λ , 则行列式的值也乘以 λ . 也就是说, 行列式中某一行(或列)的公因数可以提到行列式之外.

例如, 对于“行”的情形, 我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5.5)$$

证 为证性质 3, 由性质 1, 只需对“行”给出证明就可以了. 为证 (1.5.5) 式, 由性质 2, 也只需对 $i=1$ 证明就可以了. 按行列式的定义,

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda a_{11} A_{11} + \lambda a_{12} A_{12} + \cdots + \lambda a_{1n} A_{1n} \\ &= \lambda (a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n}) \\ &= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

这就是所要证明的.

性质 4 只有第 i 行(或列)不同, 其余各行(或列)元素均相同的两个行列式相加, 等于将这两个行列式的第 i 行(或列)的对应元素相加, 而其他元素不变的行列式.

例如, 对于行, 我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5.6)$$

性质 4 的证明与性质 3 类似.

性质 5 若行列式的两行(或两列)的元素对应成比例,则此行列式的值等于 0. 特别地,若行列式的两行(或两列)的对应元素相同,则该行列式等于 0.

证 例如,设第 i 行与第 j 行元素对应成比例,

$$\frac{a_{i1}}{a_{j1}} = \frac{a_{i2}}{a_{j2}} = \cdots = \frac{a_{in}}{a_{jn}} = \lambda \neq 0,$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \cdots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5.7)$$

设上式右边行列式的值为 d , 它的第 i 行与第 j 行对应元素相同, 因此对调该行列式的第 i 行与第 j 行位置后仍然得同一个行列式, 从而由性质 2 得到 $d = -d$, 于是 $d = 0$.

性质 6 把行列式某一行(或列)的元素均乘以常数 λ , 再添加到另一行(或列)的对应元素上, 则行列式的值不变.

例如, 将第 i 行元素乘以 λ 后, 加到第 j 行上(此时第 i 行元素不变), 则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & a_{j2} + \lambda a_{i2} & \cdots & a_{jn} + \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5.8)$$

证 只需对“行”证明就可以了. 由性质 4, (1.5.8) 式左边行列式等于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

上式第二个行列式的第 i 行与第 j 行成比例, 故该行列式等于 0. 而第一个行列式就是 (1.5.8) 式右边的行列式. 命题得证.

例 3 设 n 阶行列式 d_n 的第 i 行、第 $n-i+1$ 列元素为 $a_i, i=1, 2, \cdots, n$, 其余元素均为 0, 求 d_n 的值.

解 由题设, 此行列式从右上角至左下角(次对角线)的元素依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 其余为 0

$$d_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

为计算 d_n , 将第一列与第 n 列对调, 第二列与第 $n-1$ 对调, 第三列与第 $n-2$ 对调, $\cdots$, 最终 d_n 变为

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

由性质 2, 对调不同两列元素位置, 行列式只改变符号, 故现在只要计算对调次数的奇偶性就可以了. 显然, 对于 $k=0, 1, 2, \cdots$, 当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时, 需对调 $2k$ 次; 当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时, 需对调 $2k+1$ 次. 也就是, 对调次数的奇偶性与 $\frac{n}{2}(n-1)$ 相同. 于是, 本题的解答是

$$d_n = (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

我们用 L_i 表示 d_n 的第 i 行, C_j 表示其第 j 列, 并引用下列记号表示对行列式所作的变换:

(1) λL_i 表示用 λ 乘第 i 行; λC_j 表示用 λ 乘第 j 列, 简称“将第 i 行(或第 j 列) λ 倍”;

(2) $L_i + \lambda L_j$ ($C_i + \lambda C_j$) 表示把第 i 行(或列)的全体元素换为它们与第 j 行(或列)相应元素的 λ 倍相加所得的和, 简称为“将第 j 行(或列)的 λ 倍加到第 i 行(或列)上”;

(3) $L_i \longleftrightarrow L_j$ (或 $C_i \longleftrightarrow C_j$) 表示对调第 i 行与第 j 行(或对调第 i 列与第 j 列)的位置, 简称“对调第 i 行与第 j 行(或对调第 i 列与第 j 列)”.

用这些记号可以分别表示行列式的性质 3、6 与 2, 也更便于计算行列式的值.

例 4 计算行列式

$$d_4 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 用上述记号来表示对 d_n 变换的过程:

$$\begin{aligned} d_4 & \xrightarrow[\substack{C_2 \leftrightarrow C_3}]{C_4 - C_1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_4 - 7C_2}]{C_3 - 2C_2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 8 & 24 \\ 2 & -2 & 4 & 15 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{C_4 - 3C_3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 3 = -72. \end{aligned}$$

例 5 计算 n 阶行列式

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 该行列式中 diagonal 元素均为 a , 其余元素均为 1. 将第 $2, 3, \dots, n$ 行都加到第一行上去, 得到

$$\begin{aligned} d_n &\xrightarrow{L_1 + (L_2 + \cdots + L_n)} \begin{vmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{L_2 - L_1, \dots \\ \dots, L_n - L_1}} (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} \\ &= (a+n-1)(a-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

例 6 求证

$$d = \begin{vmatrix} a+b & c+d \\ a_1+b_1 & c_1+d_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}.$$

证 只需对 d 的第一列用性质 4, 得

$$d = \begin{vmatrix} a & c+d \\ a_1 & c_1+d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c+d \\ b_1 & c_1+d_1 \end{vmatrix}.$$

再分别对上面两个行列式第二列用性质 4, 即得所需证明的等式.

行列式还有几个重要的性质.

定理 1.5.1 (行列式的值) 由 (1.5.1) 式给出的 n 阶行列式 d_n 也可以按任意第 i 行或任意第 j 列展开:

$$d_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i=1, 2, \dots, n; \quad (1.5.9)$$

$$d_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j=1, 2, \dots, n; \quad (1.5.10)$$

这里 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

定理 1.5.2 (行列式展开) 行列式中某一行 (或列) 的各元素与另一行 (或

列)的对应元素的代数余子式乘积的总和等于0:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j; \quad (1.5.11)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad j \neq i. \quad (1.5.12)$$

此两定理均可利用前面所述的行列式的性质予以证明.

例 7 n 阶范德蒙 (Van der Monde) 行列式定义为

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

求证 $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$, 亦即 V_n 为所有下标满足 $1 \leq i < j \leq n$ 的因子 $(a_j - a_i)$ 的乘积.

证 对 n 用归纳法证明. 当 $n=2$ 时,

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1,$$

结论成立. 设结论对 V_{n-1} 成立. 将 V_n 从最后一行起逐次减去上一行的 a_1 倍, 得到

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

按第一列展开后, 得到一个 $n-1$ 阶行列式, 它的第 i 列有公因子 $a_{i+1} - a_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 提出这些公因子后, 由归纳假设, 得

$$\begin{aligned} V_n &= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i). \end{aligned}$$

由归纳原理知结论对任意大于 1 的自然数成立.

定理 1.5.3 (行列式的值) 设 $|A|$ 与 $|B|$ 分别为 m 阶行列式 A 与 n 阶行列式 B 的值, 则对如下 $m+n$ 阶行列式有

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| |B|, \quad (1.5.13)$$

(1.5.13)式中的第一项是一个 $m+n$ 阶行列式 D 的值 $|D| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix}$, 其中 D 的左上方是 A 的 m^2 个元素, 排列顺序与 A 相同, 右下方是 B 的 n^2 个元素, 排列顺序与 B 相同, 而 $*$ 位置是 n 行、 m 列的 $n \times m$ 个任取的元素, 0 则表示该位置上的元素全为 0, 第二项 $\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix}$ 类似.

证 令

$$|D| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix},$$

分别以 $\tilde{A}_{ij}$ 、 A_{ij} 表示 A 的 (i, j) 元素的余子式与代数余子式; $\tilde{D}_{ij}$ 、 D_{ij} 表示 D 的 (i, j) 元素的余子式与代数余子式. 现在对 m 使用归纳法证明三个行列式 D 、 A 、 B 的值满足 $|D| = |A| |B|$.

当 $m=1$ 时, $|D|$ 的第一行除左上角 a_{11} 外均为 0, 于是, 按第一行展开得

$$|D| = a_{11} |B| = |A| |B|.$$

设当 $m=k-1$ 时, $|D| = |A| |B|$ 成立, 现证: 当 $m=k$ 时结论成立. $|D|$ 的第一行除前 k 个元素外, 其余元素均为 0, 故按第一行展开得

$$\begin{aligned} |D| &= a_{11} D_{11} + a_{12} D_{12} + \cdots + a_{1k} D_{1k} \\ &= a_{11} \tilde{D}_{11} - a_{12} \tilde{D}_{12} + \cdots + (-1)^{k+1} a_{1k} \tilde{D}_{1k}. \end{aligned}$$

由余子式的定义, 知 a_{ij} 在 $|D|$ 中的余子式

$$\tilde{D}_{ij} = \begin{vmatrix} \tilde{A}_{ij} & 0 \\ * & B \end{vmatrix}, \quad j=1, 2, \cdots, n$$

为 $k+n-1$ 阶行列式, 其中 $\tilde{A}_{ij}$ 的阶数为 $k-1$. 由归纳假设知, $\tilde{D}_{ij} = \tilde{A}_{ij} |B|$. 于是,

$$\begin{aligned} |D| &= a_{11} \tilde{A}_{11} |B| - a_{12} \tilde{A}_{12} |B| + \cdots + (-1)^{k+1} a_{1k} \tilde{A}_{1k} |B| \\ &= (a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1k} A_{1k}) |B| = |A| |B|. \end{aligned}$$

另一个等式可类似证明.

注 行列式 A 与它的值 $|A|$ 一般情况下不必区分, 只是在强调行列式的值的性质时才使用 $|A|$.

例 8 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 将第四列依次与第三列、第二列、第一列对调,再将新得到的行列式的第五列依次与第四、第三、第二列对调,共对调了 6 次,故行列式符号改变 6 次. 于是,

$$\begin{aligned} d &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-6 + 8) = 6. \end{aligned}$$

我们以介绍行列式在解线性方程组中的应用作为本小节的结束.

设有 n 个未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 个方程的线性方程组(即 n 元一次方程组)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1.5.14)$$

其中 a_{ij} 与 $b_i, 1 \leq i, j \leq n$, 为常数. 用 A 表示方程组(1.5.14)的系数行列式

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.5.15)$$

我们有如下定理.

定理 1.5.4(克莱姆法则 G. Cramer) 对于 n 元线性方程组(1.5.14), 若它的系数行列式 A 的值 $|A| \neq 0$, 则存在惟一的解

$$x_j = \frac{|B_j|}{|A|} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.5.16)$$

其中 $|B_j|$ 是将行列式 A 的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ 分别换为 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 后得到的行列式

$$B_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, B_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}. \quad (1.5.17)$$

证 将方程组(1.5.14)的第一个方程乘以 A_{1j} 、第二个方程乘以 A_{2j} 、 $\cdots$ 、第 n 个方程乘以 A_{nj} , 然后相加, 这里 A_{ij} 是行列式 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式. 整理后得

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{r=1}^n a_{r1} A_{rj} \right) x_1 + \cdots + \left(\sum_{r=1}^n a_{rj} A_{rj} \right) x_j + \cdots + \left(\sum_{r=1}^n a_{rn} A_{rj} \right) x_n \\ &= \sum_{r=1}^n b_r A_{rj} \quad (j=1, 2, \cdots, n). \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

由定理 1.5.1、定理 1.5.2 知, 式(1.5.18)左边除第 j 项等于 $|A| x_j$ 外, 其余均为 0; 右边则等于行列式 $|B_j|$ 按第 j 列的展开式. 于是有

$$|A| x_j = |B_j| \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

因 $|A| \neq 0$, 故我们得到解(1.5.15).

例 9 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

解 利用定理 1.5.4 的记号, 计算得

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 5, & |B_1| &= \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 15, \\ |B_2| &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 5, & |B_3| &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \\ 3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 10, \end{aligned}$$

所以方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{15}{5} = 3, \quad x_2 = \frac{5}{5} = 1, \quad x_3 = \frac{10}{5} = 2.$$

例 10 设 M, N 为平面直角坐标系中不同的两点, 其坐标分别为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$. 求证过 M, N 两点的直线方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证 设过 M, N 两点的直线方程为

$$ax + by + c = 0.$$

将 M, N 两点的坐标分别代入上式, 得

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \quad ax_2 + by_2 + c = 0.$$

如果把 a, b, c 看作未知量, 上述三个方程是关于 a, b, c 的线性方程组, 它的系数行列式是

$$d = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

若 $d \neq 0$, 由克莱姆法则知该方程组只有 0 解, 即 a, b, c 均为 0. 但这是不可能的, 因为过平面直角坐标系中不同的两点 M, N , 必定有一条直线. 这样我们得到 $d = 0$.

余下的只要证明行列式 d 的展开式中 x, y 的系数

$$\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

中至少有一个不为 0. 事实上, 如果它们均为 0, 将有 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, 即 M, N 为同一个点, 这与假设矛盾. 这就证明了过 M, N 两点的直线方程为 $d = 0$.

例 11 求向量外积的行列式表示.

解 设向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 与 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 由外积的坐标表示 (定理 1.2.2)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k},$$

于是, 外积的行列式表示式是

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

例 12 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的混合积定义为

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \equiv (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

用行列式表示

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

习 题

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & x \\ 1 & 4 & x^2 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix};$$

$$(7) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

$$(8) \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix};$$

$$(9) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix};$$

$$(10) \begin{vmatrix} a_1 + \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + \lambda_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + \lambda_n \end{vmatrix}.$$

2. 证明下列等式

$$(1) \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ u+v & v+w & w+u \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_0 & -1 & & & 0 \\ a_1 & x & -1 & & \\ a_2 & & x & -1 & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \\ a_{n-1} & & & x & -1 \\ a_n & 0 & & & x \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n;$$

$$(3) n \text{ 阶行列式 } \begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & & & 0 \\ 1 & 2\cos \theta & 1 & & \\ & 1 & 2\cos \theta & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & 2\cos \theta \end{vmatrix} = \cos n\theta.$$

3. 用克莱姆法则解下列方程组

$$(1) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} bx - ay = -2ab, \\ -2cy + 3bz = bc, (abc \neq 0) \\ cx + az = 0. \end{cases}$$

4. 求证通过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与两个不平行的平面 $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ 和 $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ 都垂直的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 1.6 矩 阵

我们要引入另一个概念——矩阵,它与行列式有密切联系,并有重要的理论意义与广泛的应用.

1.6.1 矩阵的定义及运算,初等变换

1. 基本概念

定义 1.6.1(矩阵) $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$), 排成 m 行 n 列的阵式, 外加方括号(或圆括号), 写成

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵, 或简称矩阵, 其中 $[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]$, $i = 1, 2, \dots, m$ 称为矩阵的“第 i 行”, $[a_{1j} \ a_{2j} \ \cdots \ a_{mj}]^T$, $j = 1, 2, \dots, n$ 称为矩阵的“第 j 列”. a_{ij} 是矩阵的第 i 行第 j 列元素, 简称为矩阵的 (i, j) 元素.

行数 m 与列数 n 相等的矩阵称为方阵, 也称为 n ($= m$) 阶矩阵, n 为它的阶.

矩阵常用黑体大写字母 A, B, X, Y 等表示, 也常记为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

我们强调行列式与矩阵的差别: 行列式是 n^2 个数的一种阵式, 它代表一个数, 可以通过各种方式计算它的值; 但矩阵只是 $m \times n$ 个数的一种阵式, 不是一个数. 虽然行列式与矩阵都有“行”与“列”, 但前者的行与列必须相等, 后者却没有这一要求. 然而, 二者却有密切的联系, 以后我们会看到它们之间的差异与联系.

矩阵又是向量概念的推广.

定义 1.6.2 (行向量与列向量) 只含一行的矩阵称为行矩阵或行向量, 只含一列的矩阵称为列矩阵或列向量.

行向量与列向量分别记为

$$\alpha = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_m] \quad \text{与} \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

常用希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 表示行向量或列向量.

矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的任一列构成一个列向量, 而其任一行构成一个行向量, 从而矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 可写成行向量形式

$$A = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n],$$

其中

$$\beta_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n);$$

或写成列向量形式

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

其中

$$\alpha_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}] \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

向量中的元素个数是它的维数, 其第 i 个元素称为该向量的第 i 个分量. 例如, 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的行向量 α_i ($i = 1, 2, \cdots, m$), 都是 n 维的, 而其列向量 β_j ($j = 1, 2, \cdots, n$), 都是 m 维的.

几种特殊的矩阵:

(1) 零矩阵 元素全为 0 的矩阵称为零矩阵, 记为 O :

$$O = (0)_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

至少有一个元素不等于 0 的矩阵称为非零矩阵.

(2) 对角阵 行数与列数相等、且除了主对角线上元素外其余元素均为 0 的矩阵称为对角矩阵, 简称对角阵. 对角线上的元素依次为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的对角阵为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

(3) 单位阵 对角元素均为 1 的对角阵称为单位阵, n 阶单位阵记为 I_n 或 E_n , 有时也简记为 I 或 E .

(4) 上三角形阵与下三角形阵 下列两个方阵分别称为上三角形阵与下三角形阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

对于上三角形阵, 当 $i > j$ 时 $a_{ij} = 0$; 对于下三角形阵, 当 $i < j$ 时 $a_{ij} = 0$.

(5) 奇异阵与非奇异阵 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, 对应地可作出一个 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 $|A|$ 为矩阵 A 的行列式. 若行列式 $|A| = 0$, 则称 A 为奇异阵; 若行列式 $|A| \neq 0$, 则称 A 为非奇异阵.

2. 矩阵的运算

对于正整数 m 与 n , 记

$$\mathcal{M}_{m \times n} = \{A = (a_{ij}); a_{ij} \text{ 为常数}, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n\}$$

为 $m \times n$ 矩阵的全体. 矩阵有如下运算.

(1) 加法 对于两矩阵 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ 、 $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$, 定义它们的和 $A + B$ 为对应元素的和 $a_{ij} + b_{ij}$ 所构成的矩阵

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.6.1)$$

矩阵的加法只能对行数与列数相等的矩阵进行.

(2) 数乘 常数 α 与矩阵 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ 的乘积定义为 α 与 A 的每一个元素的积 αa_{ij} 所构成的矩阵

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.6.2)$$

显然, 当 $\alpha = 1$ 时, 对于任意矩阵 A , 有 $1A = A$.

由矩阵加法与数乘, 可定义负矩阵与矩阵之差.

负矩阵 在(1.6.2)式中, 取 $\alpha = -1$, 记 $(-1)A = -A$, 称 $-A$ 为 A 的负矩阵.

矩阵的差 两个矩阵 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ 、 $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$ 的差 $A - B$ 定义为 $A + (-B)$.

我们举例说明矩阵的加法与数乘的实际意义.

有两座工厂 A_1 、 A_2 , 它们所消耗的煤由三个煤矿 B_1 、 B_2 、 B_3 供应. 若一月份与二月份煤的调运吨数分别由表一与表二给出

表一

数量 (吨) 煤矿	工厂		
	B_1	B_2	B_3
A_1	5	8	0
A_2	5	0	11

表二

数量 (吨) 煤矿	工厂		
	B_1	B_2	B_3
A_1	0	4	5
A_2	17	6	8

这两个月的煤调运数量可分别由 2×3 矩阵 X_1 、 X_2 表示

$$X_1 = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 17 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

于是, 两个月煤的调运总量 X 可由 $X_1 + X_2$ 表示

$$X = X_1 + X_2 = \begin{bmatrix} 5+0 & 8+4 & 0+5 \\ 5+17 & 0+6 & 11+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 5 \\ 23 & 6 & 19 \end{bmatrix}.$$

若每吨煤的价格为 300 元,则

$$300X = \begin{bmatrix} 300 \cdot 5 & 300 \cdot 12 & 300 \cdot 5 \\ 300 \cdot 23 & 300 \cdot 6 & 300 \cdot 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,500 & 4\,800 & 1\,500 \\ 6\,900 & 1\,800 & 5\,700 \end{bmatrix}$$

为两座工厂应付给三个煤矿的货款(单位:元).

矩阵的加法与数乘的运算规则

设矩阵 $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}$, α, β 为数,则

- (i) $A + B = B + A$ (加法交换律)
- (ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (加法结合律)
- (iii) $A + O = O + A = A$ (单位元存在)
- (iv) $A + (-A) = O$ (逆元存在)
- (v) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (数乘结合律)
- (vi) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (加乘分配律)
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (加乘分配律)

矩阵的加法与数乘运算满足以上运算规则,可以直接验证. $m \times n$ 矩阵的全体所成的集合 $\mathcal{M}_{m \times n}$ 成为数域(实或复)上的一种集合,我们称此种集合为数域上的线性空间,许多参考资料上也把线性空间称作向量空间.在本章第一节中介绍的向量空间是矩阵线性空间的特例,即 3 维向量空间 $X = \{a = (a_1, a_2, a_3)\}$ 是 $\mathcal{M}_{1 \times 3}$ 线性空间.今后我们还将遇到许多有用的线性空间.

(3) 转置 将矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的行与列互换,得到一个 $n \times m$ 矩阵,称其为 A 的转置矩阵,记为 A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

转置矩阵的运算规则

- (i) $(A^T)^T = A$;
- (ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- (iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$; λ 为数;
- (iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

前三条显然成立.我们证明(iv).

设 $A = (a_{ij})_{m \times k}$, $B = (b_{ij})_{k \times n}$. 于是 $(AB)^T$ 与 $B^T A^T$ 均为 $n \times m$ 矩阵. 矩阵 $(AB)^T$ 的 (i, j) 元素是矩阵 AB 的 (j, i) 元素,它等于

$$\sum_{r=1}^k a_{jr}b_{ri} = \sum_{r=1}^k b_{ri}a_{jr}. \quad (1.6.3)$$

而 $B^T A^T$ 的 (i, j) 元素是 B^T 的第 i 行元素与 A^T 的第 j 列元素对应乘积的和, 也就是 B 的第 i 列元素 $b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ki}$ 与 A 的第 j 行元素 $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jk}$ 对应乘积的和, 这正是 (1.6.3) 式右边的和式. 从而 (iv) 成立.

例 1 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 计算 $AB, A^T B^T, B^T A^T$.

解 计算

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$A^T B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

可以看到, $(AB)^T = B^T A^T$; 但是 $(AB)^T \neq A^T B^T$.

(4) 乘法 对于两矩阵 $A \in \mathcal{M}_{m \times k}, B \in \mathcal{M}_{k \times n}$, 定义它们的乘积 $A \cdot B$ 为矩阵 $C \in \mathcal{M}_{m \times n}$, 其中 $C = (c_{ij})$ 为

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj},$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

乘积矩阵 C 的元素 c_{ij} 为矩阵 A 的第 i 行元素与矩阵 B 的第 j 列相应元素的乘积的和. 乘积矩阵 $C = A \cdot B$ 也简称 A 与 B 的积, 并简记为 AB .

看一个实例.

下列两个表中, 表三给出甲、乙两个工厂生产 2 种产品 M_1, M_2 的数量, 表四给出每一件产品所需要的原料 N_1, N_2, N_3 的数量.

表三

产 工 厂	产 品 量	产 品	
		M_1	M_2
甲		a_{11}	a_{12}
乙		a_{21}	a_{22}

表四

单 件 耗 量	原 料	产 品		
		N_1	N_2	N_3
M_1		b_{11}	b_{12}	b_{13}
M_2		b_{21}	b_{22}	b_{23}

将上列数据用矩阵表示

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}.$$

试求甲、乙两厂生产 2 种产品 M_1, M_2 时, 对 3 种原料 N_1, N_2, N_3 的总耗量.

用表五表示这个总消耗量

表五

原料 总耗量 工厂	N_1	N_2	N_3
甲	c_{11}	c_{12}	c_{13}
乙	c_{21}	c_{22}	c_{23}

并写为 $C = (c_{ij})$. 经分析, 不难求得

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}; \quad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22};$$

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23};$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}; \quad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22};$$

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}.$$

C 正是 A 与 B 的乘积.

由乘积矩阵的定义可知, 仅当矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时, 乘积 AB 才有意义, 所得乘积矩阵 C 的行数等于 A 的行数、其列数等于 B 的列数.

例 2 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, 求 AB 与 BA .

解 由定义

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= O; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由以上例子可知: (1) 若 A, B 为同阶方阵, 则 AB 与 BA 均为同阶方阵. 但一般说来, $AB \neq BA$, 也就是矩阵的乘法不满足交换律. (2) 虽然 A 与 B 都是非零矩阵, 但乘积却可能是零矩阵. 这种现象在数的乘法运算以及多项式的乘法运算中是不会发生的.

例 3 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 AA^T 与 $A^T A$.

解 由定义

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

由例3可见, A 虽然不是方阵, 但 A 与它的转置矩阵 A^T 总可以相乘, 但乘积 $A^T A$ 与 AA^T 却是不同阶的方阵.

矩阵乘法的运算规则

设矩阵 A, B, C 的下述乘法有意义, α, β 为常数, 则

$$(i) (AB)C = A(BC) \quad (\text{乘法结合律})$$

$$(ii) (A+B)C = AC + BC \quad (\text{加乘分配律})$$

$$C(A+B) = CA + CB \quad (\text{加乘分配律})$$

$$(iii) \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \quad (\text{数与乘法结合律})$$

$$(iv) I_m A = AI_n = A \quad (\text{左、右单位方阵})$$

上述运算规则十分重要, 以后经常用到. 规则(ii)、(iii)、(iv)可以直接验证, 留给读者自行完成. 现在我们来证明(i)

设 $A \in \mathcal{M}_{m \times k}, B \in \mathcal{M}_{k \times l}, C \in \mathcal{M}_{l \times n}$. 于是, $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 均为 $m \times n$ 矩阵. 令

$$A = (a_{ir})_{m \times k}, B = (b_{rs})_{k \times l}, C = (c_{sj})_{l \times n}.$$

则矩阵 $(AB)C$ 的 (i, j) 元素为

$$\sum_{s=1}^l \left(\sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rs} \right) c_{sj}.$$

显然

$$\sum_{s=1}^l \left(\sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rs} \right) c_{sj} = \sum_{r=1}^k a_{ir} \left(\sum_{s=1}^l b_{rs} c_{sj} \right),$$

上式右边恰为矩阵 $A(BC)$ 的 (i, j) 元素. 故 $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 的对应元素都相等, 所以(i)成立.

由此, 我们可以把 $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 中的括号省去, 简记为 ABC 等. 若 A 为 n 阶方阵, k 个 A 相乘 $AA \cdots A$, 可记为 A^k .

(iv)中的单位方阵 I_m 与右单位方阵 I_n 在乘法运算时所起的作用, 相当于数 1 在数的乘法运算时的作用. 当 $m = n$ 时, 就是单位方阵.

例4 设 A, B 均为 n 阶方阵, I 为 n 阶单位方阵. 化简下列式子

$$(1) (A+I)^2 - A^2; \quad (2) (A+B)^2 - A^2 - B^2;$$

$$(3) (A-I)(A^2 + A + I).$$

解 运用法则进行计算.

$$\begin{aligned} (1) (A+I)^2 - A^2 &= (A+I)(A+I) - A^2 = A(A+I) + I(A+I) - A^2 \\ &= A^2 + A + A + I - A^2 = 2A + I; \end{aligned}$$

$$(2) (A+B)^2 - A^2 - B^2 = A(A+B) + B(A+B) - A^2 - B^2 \\ = A^2 + AB + BA + B^2 - A^2 - B^2 = AB + BA;$$

$$(3) (A-I)(A^2+A+I) = A(A^2+A+I) - (A^2+A+I) = A^3 - I.$$

注 由于矩阵的乘法不满足交换律,因此中学所学的代数恒等式对于矩阵一般不再成立.例如,一般说来,若 A, B 为方阵, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$; $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$; $A^3 - B^3 \neq (A-B)(A^2 + AB + B^2)$ 等等.请读者特别当心.

例 5 设 A 为 n 阶方阵, k 为常数,求证 $|kA| = k^n |A|$.

解 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 $kA = (ka_{ij})_{n \times n}$. 因行列式 $|kA|$ 的每一行都有因子 k , 故可将公因子提到行列式外,得

$$|kA| = |(ka_{ij})_{n \times n}| = k^n |A|.$$

3. 矩阵的初等变换

研究矩阵,重要方法之一是先将矩阵化简,这就需要对矩阵进行初等变换.

定义 1.6.3 (初等变换) 对矩阵 A 的行或列施行的下述 3 种变换,均称为矩阵的初等变换:

- (1) 将 A 的某一行(或列)的元素均乘以 $\lambda (\lambda \neq 0)$;
- (2) 将 A 的某一行(或列)的元素乘以 λ 后,加到另一行(或列)上;
- (3) 对调 A 的任意两行(或两列).

注 第三种初等变换可以通过前两种变换来实现,故有些教科书上把前两种称为初等变换,而把第三种称为导出变换.

初等变换仍然采用行列式时使用的记号,例如记矩阵的第 i 行为 L_i 、第 j 列为 C_j . 则变换(1)记为“ λL_i (或 λC_j)”; (2)记为“ $L_i + \lambda L_r$ (或 $C_j + \lambda C_s$)”等.

例 6 利用初等变换将矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

化简.

解 利用初等变换的记号化简 A 如下.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow[C_4 - C_1]{C_2 - 2C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_4 + 2C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

矩阵的初等变换不仅能用上述方式表达,而且还可以用矩阵的乘法来表达.

定义 1.6.4(初等方阵) 我们定义 3 种类型的初等方阵,简称初等阵.

(1) 倍乘阵 $E^i(\lambda)$ 将单位阵 I 的第 (i, i) 元素 1 换成非零常数 λ , 其余元素不变, 由此得到的方阵称为倍乘阵, 记为 $E^i(\lambda)$.

(2) 倍加阵 $E^{ij}(\lambda)$ 将单位阵 I 的第 $(i, j)(i \neq j)$ 元素 0 换成非零常数 λ , 其余元素不变, 由此得到的方阵称为倍加阵, 记为 $E^{ij}(\lambda)$.

(3) 对换阵 E^{ij} 将单位阵 I 的第 i 行元素与第 $j(j \neq i)$ 行元素对换位置, 其余元素不变, 由此得到的方阵称为对换阵, 记为 E^{ij} .

用初等阵可以表达矩阵的初等变换.

定理 1.6.1(初等变换的方阵表示) 用初等阵左乘(或右乘)矩阵 A , 等于将 A 施行一次初等变换, 具体地说,

(1) 用倍乘阵 $E^i(\lambda)$ 左乘(或右乘)矩阵 A , 等于将 A 的第 i 行(或第 i 列)的每个元素乘以 λ ;

(2) 用倍加阵 $E^{ij}(\lambda)$ 左乘(或右乘)矩阵 A , 等于将 A 的第 j 行(或第 i 列)的每个元素乘以 λ 后, 加到第 i 行(第 j 列)上;

(3) 用对换阵 E^{ij} 左乘(或右乘)矩阵 A , 等于将 A 的第 i 行与第 j 行(或列)对换位置.

该定理请读者自行证明.

施行于矩阵 A 的行的初等变换, 称为行初等变换, 施行于列的初等变换, 称为列初等变换, 并分别简称为行变换与列变换.

例 7 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, 用矩阵乘法计算:

(1) $E^2(2) \cdot A$ 与 $A \cdot E^2(2)$;

(2) $E^{12}(-1) \cdot A$ 与 $A \cdot E^{12}(-1)$;

(3) $E^{13} \cdot A$ 与 $A \cdot E^{13}$.

解 由乘法定义可得

$$(1) E^2(2) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix};$$

$$A \cdot E^2(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 6 \\ 7 & 16 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$(2) E^{12}(-1) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix};$$

$$A \cdot E^{12}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$(3) E^{13} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$A \cdot E^{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

把矩阵化简到何种程度? 我们引入阶梯矩阵的概念.

定义 1.6.5(阶梯矩阵与简化阶梯矩阵) 把适合下述两个条件的矩阵 A 称为阶梯矩阵

- (1) 若矩阵 A 的某一行元素全为 0(称为零行), 则该行下方元素也全为 0;
- (2) 从第二行起, 每行第一个非零元的列标比上一行第一个非零元的列标大.

例如, 矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

就是阶梯矩阵.

若一个阶梯矩阵还适合条件

- (3) 每行第一个非零元均为 1, 且该元所在列的其他元均为 0, 则称此矩阵为简化阶梯矩阵.

定理 1.6.2(矩阵的化简) 任一矩阵总可以经过若干次行变换化为阶梯矩阵或简化阶梯矩阵.

本定理的证明可以利用行变换的定义, 从第一列起逐列讨论而得到.

若矩阵 A 经过若干次行变换化为简化阶梯矩阵 A_0 , 则称 A_0 为 A 的简化阶梯矩阵.

定理 1.6.3(方阵的化简) 设 A 为方阵, A_0 为其简化阶梯方阵, 则 A_0 必为上三角形阵. 又若对应的行列式满足 $|A| \neq 0$, 则 A_0 必为单位阵; 若 $|A| = 0$, 则 A_0 的最后一行必为零行.

现在我们来证明下面重要的定理.

定理 1.6.4(方阵乘积的行列式) 设 A, B 均为方阵, 则

$$|AB| = |A| |B|. \quad (1.6.4)$$

证 当 A, B 均为初等阵时, 由初等阵及行列式的运算性质, 易知 (1.6.4) 式成立.

对一般情形, 设 A_0 为 A 的简化阶梯矩阵, A_0 是 A 经过若干次行变换得到的, 则 A_0 也可经过若干次, 例如 k 次, 变换为 A

$$A = T_1 T_2 \cdots T_k A_0,$$

其中 $T_1, T_2, \dots, T_k$ 为初等阵. 于是,

$$\begin{aligned} |AB| &= |T_1 T_2 \cdots T_k A_0 B| = |T_1| |T_2 \cdots T_k A_0 B| \\ &= |T_1| |T_2| |T_3 \cdots T_k A_0 B| = |T_1 T_2| |T_3 \cdots T_k A_0 B| = \cdots \\ &= |T_1 T_2 \cdots T_k| |A_0 B|. \end{aligned}$$

若 $|A_0| \neq 0$, 则 A_0 为单位阵, 此时, $|A| = |T_1 T_2 \cdots T_k|$ 已成立; 若 $|A_0| = 0$, 则 $|A| = 0$, 且 A_0 的最后一行为零行. 于是, $A_0 B$ 的最后一行为零行, 故 $|A_0 B| = 0$. 从而, (1.6.4) 式两边均为 0.

定理 1.6.4 可推广到多个 n 阶矩阵相乘的情形. 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 均为 n 阶矩阵, 则

$$|A_1 A_2 \cdots A_k| = |A_1| |A_2| \cdots |A_k|.$$

4. 逆阵

我们已经建立了矩阵的加法、减法、数乘与乘法运算, 很自然地要问, 可否定义矩阵的除法?

在初等代数中, 除法是作为乘法的逆运算而进行的, 但这是基于乘法的交换律. 可是矩阵的乘法不满足交换律, 故当 $BC_1 = C_2 B = A$ 时, 却可能有 $C_1 \neq C_2$, 因此若作“ $A \div B$ ”, 却不知该等于 C_1 呢还是等于 C_2 ? 另一方面, 我们也看到 (例 1), 矩阵乘法的另一个奇特的现象, 即 A, B 都不是零阵, 但 $AB = O$ 却可能成立, 此时, A 与 B 被称为零因子. 由于零因子的存在, 也使矩阵的除法运算没有意义.

尽管如此, 我们还是可以把初等代数中的除法作为“逆”的概念推广到矩阵中来, 定义所谓的“逆阵”.

定义 1.6.6 (逆阵) 设 A 为方阵, 若存在方阵 B , 使得

$$AB = BA = I,$$

其中 I 为单位阵, 则称 B 为 A 的逆方阵, 简称逆阵. 若 A 有逆阵, 则称 A 为可逆方阵, 或简称为可逆阵. 可逆阵 A 的逆阵记为 A^{-1} .

定理 1.6.5 (逆阵的惟一性) 可逆阵的逆阵必惟一.

证 设 B 与 C 都是 A 的逆阵

$$AB = BA = I; \quad AC = CA = I.$$

则

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C.$$

所以定理结论成立.

逆阵的运算规则

假设 A, B 都是可逆阵, 则

$$(i) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$(ii) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

$$(iii) (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}, \quad \lambda \neq 0 \text{ 为非零数};$$

$$(iv) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

下面介绍求逆阵的方法.

首先注意到, 并不是所有方阵都可逆. 显然, 零阵不可逆. 又如 $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 也不可逆. 因为若 } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ 为其逆阵, 则}$$

$$A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

但无论 a 与 b 取何值, 总有 $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I$, 所以 A 不可逆. 因此, 必须先讨论逆阵存在的条件. 这需要引进伴随方阵的概念.

定义 1.6.7 (伴随方阵) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, $|A|$ 为相应的行列式, A_{ij} 为 $|A|$ 的 (i, j) 元素 a_{ij} 的代数余子式. 称方阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.6.5)$$

为 A 的伴随方阵, 简称 A^* 为伴随阵. 特别注意, 伴随阵 A^* 的 (i, j) 元素是 a_{ji} 的代数余子式 A_{ji} .

由定理 1.5.1 与 1.5.2 可知, A 与 A^* 的乘积 AA^* (或 A^*A) 的 (i, j) 元素为

$$\sum_{r=1}^n a_{ir}A_{jr} = \sum_{r=1}^n A_{ri}a_{rj} = \begin{cases} |A|, & i=j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

于是, 我们得到定理

定理 1.6.6 (方阵与伴随阵之积) n 阶方阵 A 与其伴随阵 A^* 的乘积为

$$AA^* = A^*A = \begin{bmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{bmatrix} = |A| I_n. \quad (1.6.6)$$

现在我们给出方阵可逆的一个充要条件.

定理 1.6.7(可逆阵的充要条件) A 为可逆阵的充要条件是 A 为非奇异阵, 即 $|A| \neq 0$.

证 设 A 为可逆阵, 即存在 A^{-1} , 使得 $AA^{-1} = I$. 由定理 1.6.4 得 $|A||A^{-1}| = |I| = 1$. 所以 $|A| \neq 0$.

反之, 设 $|A| \neq 0$, 由定理 1.6.6, $AA^* = A^*A = |A|I_n$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{|A|}AA^* &= A\frac{A^*}{|A|} = I; \\ \frac{1}{|A|}A^*A &= \frac{A^*}{|A|}A = I.\end{aligned}$$

即

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}. \quad (1.6.7)$$

所以 A 可逆.

由上述定理及逆阵的惟一性, 可将逆阵定义中的条件减弱, 我们有如下推论.

推论 1.6.1 若 A 为方阵, 且存在方阵 B , 使得 $AB = I$ 或 $BA = I$, 则 B 为 A 的逆阵.

证 设 $AB = I$, 由 $|A||B| = 1$ 知 $|A| \neq 0$. 于是, 由定理 1.6.7 推得 A 可逆. 设 A 的逆阵为 A^{-1} , 在等式 $AB = I$ 两边左乘 A^{-1} , 得到

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1},$$

这就是 $B = A^{-1}$. 若 $BA = I$, 同理可证 $B = A^{-1}$.

该推论告诉我们, 若要验证 B 是 A 的逆阵, 不必同时验证 $AB = I$ 与 $BA = I$, 只要验证其中之一就够了.

例 8 试求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 的逆阵.

解 先求得

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad |A| = -2.$$

于是

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

例 9 对于 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 试求 A^{-1} , B^{-1} , $(AB)^{-1}$.

解 先求得

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

公式(1.6.7)只是在方阵 $\mathbf{A}$ 的阶数较小时适用,或对某些特殊情形的方阵才有效.当方阵阶数较高时,通常采用初等变换方法求逆阵.

先分析一下.由定理 1.6.1 可知,对矩阵施行一次行变换,等价于用某个初等阵左乘该矩阵.另一方面,任一个非异方阵 $\mathbf{A}$ 总可经过若干次行变换化为单位阵.我们假设对应于这些行变换的初等阵依次为 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_k$, 则

$$\mathbf{T}_k \mathbf{T}_{k-1} \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

于是,将 $\mathbf{A}^{-1}$ 右乘上式两边,得

$$\mathbf{T}_k \mathbf{T}_{k-1} \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1},$$

从而

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{T}_k \mathbf{T}_{k-1} \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{I}.$$

这表明,把 $\mathbf{A}$ 化为单位阵的行变换若依次施加在单位阵 $\mathbf{I}$ 上,就能把 $\mathbf{I}$ 化为 $\mathbf{A}^{-1}$. 于是我们得到求非异方阵 $\mathbf{A}$ 的逆阵的简便方法:

在 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的右边放置一个单位阵 $\mathbf{I}$, 构成一个 $n \times 2n$ 矩阵,只要对该矩阵施行行变换,当左边位置上的 $\mathbf{A}$ 化为单位阵时,右边位置的单位阵就成为了 $\mathbf{A}^{-1}$.

例 10 求 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ 的逆阵 $\mathbf{A}^{-1}$.

解 我们采用初等变换的记号

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3+3L_1 \\ L_2+5L_1; (-1)L_1}]{\substack{L_2+5L_1; (-1)L_1 \\ L_3+3L_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{L_3+L_2 \\ L_1+L_2; L_2+L_3}]{\substack{L_1+L_2; L_2+L_3 \\ L_3+L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1+2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. 分块矩阵

对于阶数比较高的矩阵,为了运算方便,有时将矩阵分割成若干个小矩阵.通常是用水平线与竖直线把矩阵分成若干块,每一块称为原矩阵的子块.若把每一个子块看成原矩阵的新元素,这样得到的矩阵称为分块矩阵.

例如,设 $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix};$$

其中

$$\begin{aligned} P_{11} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; & P_{12} &= \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}; \\ P_{21} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}; & P_{22} &= \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

这里的 $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ 就是 A 的一个分块矩阵.由于水平线与竖直线有不同的划法,因此一个矩阵可以有多种不同的分块矩阵.

分块矩阵的运算规则

(1) 分块矩阵的加法 设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵,将它们按同样方式分块

$$A = (P_{ij})_{r \times s}; \quad B = (Q_{ij})_{r \times s}.$$

对于任意 $i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s, P_{ij}$ 与 Q_{ij} 的行数相同,列数也相同,则

$$A + B = (P_{ij} + Q_{ij}) = \begin{bmatrix} P_{11} + Q_{11} & \cdots & P_{1s} + Q_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{r1} + Q_{r1} & \cdots & P_{rs} + Q_{rs} \end{bmatrix}.$$

(2) 分块矩阵的数乘与转置 设 A 的分块形式为 $(P_{ij})_{r \times s}, \lambda$ 为常数,则

$$\lambda A = (\lambda P_{ij})_{r \times s};$$

$$A^T = \begin{bmatrix} P_{11}^T & \cdots & P_{r1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ P_{1s}^T & \cdots & P_{rs}^T \end{bmatrix}.$$

必须注意,普通矩阵转置只需要将行改为列、列改为行就够了,而分块矩阵还要把每一个子块作一次转置.例如,设 A 的分块形式为

$$A = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

其中

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad P_{21} = [7 \ 8], \quad P_{22} = [9].$$

则它的转置矩阵为

$$A^T = \begin{bmatrix} P_{11}^T & P_{21}^T \\ P_{12}^T & P_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

(3) 分块矩阵的乘法 设 A 为 $m \times k$ 矩阵, B 为 $k \times n$ 矩阵, 其分块矩阵分别为

$$A = (P_{ij})_{r \times s}, \quad B = (Q_{ij})_{s \times t},$$

对任何 $j = 1, 2, \dots, s$, P_{1j} 的列数等于 Q_{1j} 的行数, 则

$$AB = (R_{ij})_{r \times t},$$

其中 $R_{ij} = P_{i1}Q_{1j} + P_{i2}Q_{2j} + \dots + P_{is}Q_{sj}$ ($i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, t$).

对于分块矩阵 A 与 B 的乘法运算, 不仅要求 A 分块的列数等于 B 分块的行数, 而且 A 中子块的列数与 B 中子块的行数也要相等, 否则乘法将失去意义. 在进行乘法运算时, 只要把每一个子块看作矩阵的元素, 按普通矩阵乘法法则相乘. 子块相乘时, A 的子块在左, B 的子块在右.

某些矩阵进行适当的分块后, 其中很多子块成为特殊的矩阵, 例如有些成为零矩阵或对角阵, 这时进行乘法运算时将会带来很多方便.

例 11 设矩阵 A 与 B 的分块矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

试用分块矩阵乘法计算 AB .

解 由分块矩阵乘法公式, 得

$$AB = \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PI + OR \\ OI + QR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ QR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

若方阵 A 的分块矩阵是对角阵, 且作为分块矩阵, 它的对角元素均为可逆方阵, 这时, A 的逆阵有较简便的形式. 设

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix},$$

这里 $A_1, \dots, A_r$ 的逆阵分别为 $A_1^{-1}, \dots, A_r^{-1}$, 则有

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^{-1} \end{bmatrix}.$$

上面的结论并不难证明.事实上,由分块矩阵的乘法,我们有

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_1^{-1} & & & \\ & A_2 A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r A_r^{-1} \end{bmatrix} \\ = I.$$

例 12 求方阵

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的逆阵 A^{-1} .

解 记 $A_1 = [-2]$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$. 显然, $A_1^{-1} =$

$\left[-\frac{1}{2}\right]$. 由例 10 知

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

于是

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.6.2 矩阵的秩

矩阵的秩是一个极其重要而又深刻的概念,它建立在向量组的相关性基础上.

1. 向量组的线性组合

定义 1.6.8(线性组合) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 m 个 n 维向量, 我们称其为 n 维向量的一个向量组. 又设 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 是 m 个数, 称

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m \quad (1.6.8)$$

为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的一个线性组合, 也称 β 可由该向量组线性表示. 当

$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ 时, β 也可写为向量形式

$$\beta = \left(\sum_{j=1}^m k_j a_{j1}, \sum_{j=1}^m k_j a_{j2}, \dots, \sum_{j=1}^m k_j a_{jn} \right).$$

例 13 设 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 0), \alpha_2 = (3, -1, 0, 1), \alpha_3 = (0, 1, -1, 0)$. 取 $k_1, k_2 = -1, k_3 = 2$. 写出向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 关于 k_1, k_2, k_3 的线性组合 β .

解 易见

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = (-2, 3, 0, -1)$$

是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个线性组合.

2. 向量组的线性相关与无关

定义 1.6.9(线性相关与无关) 设有 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 若存在不全为 0 的常数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0,$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 不是线性相关的, 则称此向量组线性无关.

线性相关的重要性质

性质 1 包含零向量的向量组必定线性相关;

性质 2 包含两个相等向量的向量组必定线性相关;

性质 3 设 S 是 m 个 n 维向量的向量组, M 是 S 的一部分向量构成的向量组. 若 M 为线性相关组, 则 S 也是线性相关组; 若 S 是线性无关组, 则 M 也是线性无关组.

线性相关与线性组合这两个概念之间有密切联系, 我们有如下定理.

定理 1.6.8(线性相关的充要条件) $m (\geq 2)$ 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关的充要条件是: 这 m 个向量中必有一个是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.

证 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则存在不全为 0 的常数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得 (1.6.8) 式成立. 不失一般性, 设 $k_1 \neq 0$, 则由 (1.6.8) 式可得

$$\alpha_1 = \frac{-k_2}{k_1} \alpha_2 + \frac{-k_3}{k_1} \alpha_3 + \dots + \frac{-k_m}{k_1} \alpha_m.$$

即 α_1 是 $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合.

反之, 设有一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合, 不妨设 α_1 是 $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性组合. 于是, 存在常数 $k_2, \dots, k_m$, 使得 $\alpha_1 = k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$, 即

$$-\alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0,$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是线性相关的. 定理得证.

线性相关与线性无关是代数学中两个抽象的概念, 但它们却有明显的几何意义.

设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 与 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 为两个 3 维向量, 我们有

(i) α 与 β 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中一个是另一个的线性表示, 即 $\alpha = k\beta$, 此式的几何意义是: 两向量 α 与 β 共线;

(ii) α 与 β 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha$ 与 β 不共线;

(iii) α, β, γ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ 共面.

例 14 设有 $k+1$ 个 n 维向量 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1 + \lambda \alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 线性相关, 其中 λ 为常数. 试证 $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 线性无关.

证 用反证法, 如果 $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 线性相关, 则存在常数 $m_2, \dots, m_k$, 使得

$$\alpha_0 = m_2 \alpha_2 + \dots + m_k \alpha_k. \quad (1.6.9)$$

由假设

$$\alpha_1 + \lambda \alpha_0 = l_2 \alpha_2 + \dots + l_k \alpha_k, \quad (1.6.10)$$

其中 $l_2, \dots, l_k$ 为常数. 将 (1.6.10) 式代入 (1.6.9) 式并化简, 得

$$\alpha_1 + (\lambda m_2 - l_2) \alpha_2 + \dots + (\lambda m_k - l_k) \alpha_k = 0.$$

这与 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 线性无关矛盾. 这就证明了 $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 是线性无关的.

3. 矩阵的行向量与列向量

我们经常把一个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 分块为行向量或列向量的形式

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } \alpha_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}), \quad (i=1, 2, \dots, m); \quad (1.6.11)$$

或

$$A = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n], \quad \text{其中 } \beta_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T, \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (1.6.12)$$

于是, 矩阵的行向量或列向量的线性相关性可用如下定理表示.

定理 1.6.9 (行(列)向量相关的充要条件) 设矩阵 A 用列向量表示为

原书缺页

量组, M 是 S 中 r 个线性无关的向量组. 若把 S 中任一个其他向量添加到 M 中, 得到的向量组均线性相关, 则称 M 为 S 的极大线性无关组, 简称极大无关组.

例如, 设 S 中含有 $\alpha_1 = (1, 0, -1)$ 、 $\alpha_2 = (0, 1, 0)$ 、 $\alpha_3 = (-1, 0, 1)$ 三个向量. 不难证明, α_1 、 α_2 线性无关, α_2 、 α_3 也线性无关, 但 α_1 、 α_2 、 α_3 线性相关. 于是, α_1 、 α_2 与 α_2 、 α_3 都是 S 的极大无关组.

极大无关组的性质

性质 1 n 维向量组 S 中任一向量可由它的极大无关组线性表示, 且表示式是惟一的.

性质 2 n 维向量组 S 的两个不同极大无关组中向量的个数必相等.

性质 1 可由定理 1.6.13 推得, 我们只证明性质 2.

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 与 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 均为 S 的极大无关组, 且 $r \neq s$, 不妨设 $r > s$. 由性质 1 知, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 可由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 线性表示. 由定理 1.6.13, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 线性相关, 这与假设矛盾. 性质 2 得证.

性质 2 表明, 向量组的极大无关组中向量个数是反映该向量组本质性质的重要特征量. 我们对这个量下一个定义.

定义 1.6.11(向量组的秩) 一个向量组的极大无关组中向量个数称为该向量组的秩. 向量组 S 的秩记为 $\text{rank}(S)$, 简记为 $r(S)$.

由定理 1.6.12 知道, 一个 n 维向量组, 无论它含有多少个向量, 其秩不会超过 n .

5. 矩阵的秩

一个 $m \times n$ 矩阵, 它的行向量(共 m 个)与列向量(共 n 个)分别构成 n 维与 m 维的向量组, 这两个向量组的秩之间有什么关系呢? 下面的定理会告诉我们, 这两个向量组的秩是相等的, 这就是所谓“矩阵的秩”. 下面我们通过“ k 阶子式”来定义这个秩.

定义 1.6.12(矩阵的子式) 在一个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 中, 任取 k 行与 k 列, 恰有 k^2 个元素同时属于这 k 行与 k 列, 这 k^2 个元素按原先行与列的顺序组成的 k 阶行列式, 称为矩阵 A 的 k 阶子式.

例如, $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

A 的 2 阶子式有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{vmatrix}, \\ \dots\dots\dots,$$

等,共 18 个.

定义 1.6.13(矩阵的秩) (1) 若矩阵 A 有一个 k 阶子式不等于 0,而它的所有 $k+1$ 阶子式或者不存在,或者均为 0,则称 A 的秩为 k ,记为 $\text{rank}(A) = k$,或 $r(A) = k$.

(2) 矩阵 A 的行向量组的秩称为 A 的行秩;其列向量组的秩称为 A 的列秩.

定理 1.6.13(三种秩的关系) 矩阵 A 的秩、它的行秩、它的列秩三者均相等.

为证上述定理,先证明初等变换不改变相关关系.如前,我们将行初等变换简称为行变换,列初等变换简称为列变换.

定理 1.6.14(初等变换不改变秩) 对矩阵 A 施行列变换,不改变 A 的行向量之间的相关关系;同样,施行行变换,不改变 A 的列向量之间的相关关系.

证 只需对列变换证明就够了.

设相应于某个列变换的初等阵为 T ,于是,经过该列变换后变成矩阵 AT .又设 A 的行向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 之间有相关关系

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0.$$

记 $\xi = (k_1, k_2, \dots, k_m)$,上式即 $\xi A = 0$.故

$$\xi(AT) = (\xi A)T = 0.$$

因而矩阵 AT 的行向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 之间也有等式

$$k'_1 \beta_1 + k'_2 \beta_2 + \dots + k'_m \beta_m = 0$$

成立.反之,因初等变换是可逆的,同样可从 AT 的行向量的相关关系导出 A 的行向量相同的相关关系.定理得证.

定理 1.6.13 的证明

(1) 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 k .容易看出,交换 A 的两行或两列不改变 A 的秩,故可设 A 的左上角的 k 阶子式为 $|D|$, $|D| \neq 0$.

(2) 又设 $\bar{A}$ 是 A 经过行变换得到的矩阵,相应的变换初等阵为 T .

① 若 T 为倍乘阵,显然 $\bar{A}$ 左上角的 k 阶子式 $|\bar{D}| \neq 0$.

② 若 T 为倍加阵, $\bar{A}$ 左上角的 k 阶子式 $|\bar{D}|$ 有两种情况,第一种, $|\bar{D}| \neq 0$,则 $r(\bar{A}) = r(A)$;第二种, $|\bar{D}| = 0$,此时,由于 $\bar{A}$ 必定是将 A 的第 j 行 ($k < j \leq$

m)乘以某个非0常数 λ ,再到第 i 行($1 \leq i \leq k$)而得到.不失一般性,设 $i=1$.另一方面,设 A 的行向量的前 k 个分量构成的 k 维向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$,于是 $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_k$ 线性无关.可是 $|\bar{D}|=0$,因此

$$\bar{\alpha}_1 + \lambda \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_k$$

线性相关.由例14知, $\bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_k$ 线性无关,从而 $\bar{A}$ 存在一个不等于0的 k 阶子式,故 $r(\bar{A}) \geq r(A)$.

同样, A 可以由 $\bar{A}$ 经过行变换得到,从而也有 $r(A) \geq r(\bar{A})$.

(3) 同理可证,对 A 施行列变换也不改变 A 的秩.

综上所述, $r(A) = r(\bar{A})$.

最后,由定理1.6.15可知,对 A 施行行变换,不改变 A 的列向量之间的相关关系,也就是行变换不改变 A 的列秩;于是,将 A 经过行变换变为简化阶梯矩阵 A_0 ,而 A_0 的秩与其列秩均等于 A_0 的非零行的行数,故 A_0 的秩与其列秩相等.同理, A_0 的秩与其行秩相等.定理得证.

定理1.6.14也给出了求矩阵 A 的秩 $r(A)$ 的方法:用行变换将矩阵化为阶梯矩阵,其非零行的数目就是矩阵的秩.

例15 求矩阵 A 的秩

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

解 对 A 施行行变换

$$A \xrightarrow[L_4 - 3L_1]{L_2 - 2L_1, L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - 2L_2]{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

右边已经变为阶梯矩阵,它只有两个非零行,并且这两个非零行是线性无关的,因此 $r(A)=2$.

在以上例子中,我们只使用了行变换.若同时使用列变换,则能把矩阵化得更加简单,可以使每一行与每一列都至多有一个非零元素(甚至可把这些非零元素都变成1),那么,非零元素的个数就是矩阵的秩.

1.6.3 利用矩阵讨论线性方程组的解

我们要讨论的方程组,其所包含的方程个数与未知量的个数不一定相等,这就大大扩大了初等数学教程中所能解的线性方程组的范围.

考虑含有 m 个方程、 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1.6.15)$$

采用矩阵与向量的记号,令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad (1.6.16)$$

则方程组(1.6.15)可简记为

$$Ax = b. \quad (1.6.17)$$

我们称 A 为方程组(1.6.15)的系数矩阵, x 为未知列向量, b 为已知列向量. 若 $b \neq 0$, 则称(1.6.15)为非齐次线性方程组; 若 $b = 0$, 则称(1.6.15)为齐次线性方程组.

方程组(1.6.15)中方程的个数 m 与未知量的个数 n 之间, 可以是 $m > n$ 、 $m = n$ 、 $m < n$ 中的任一个.

1. 高斯消去法

在初等数学里, 读者已经熟悉用消去法解二元一次方程组与三元一次方程组. 在那里所用的基本方法是: 将某一个方程乘以适当的常数加到另一个方程上去, 从而消去一个未知数, 由此得到一个新方程组与原方程组同解, 而未知数比原方程组少. 经过若干次这种步骤, 就可以得到所要求的解. 这一方法对任意的线性方程组(1.6.15)也是有效的. 只是我们现在要把这些步骤用矩阵、行列式的观点来描述.

首先, 我们定义方程组(1.6.15)的系数矩阵 A 的增广矩阵 B

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}. \quad (1.6.18)$$

易见, B 是在(1.6.15)中省去了未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 以及所有的加号与等号, 但却保留了方程组(1.6.15)的全部信息: B 的第 i 行相应于(1.6.15)中的第 i 个方程, B 的第 j 列是未知量 x_j 的系数列向量, B 的最后一列是线性方程组(1.6.15)的已知列向量.

对于增广矩阵 B , 若施行第一种与第二种行变换, 即: ① 用非零常数 λ 乘以

第 i 行, ② 把第 j 行的 λ 倍加到第 i 行上去, 相应的方程组 (1.6.15) 会发生什么变化呢?

事实上, 变换 ① 相当于用常数 λ 去乘第 i 个方程, 变换 ② 相当于将第 j 个方程的 λ 倍加到第 i 个方程上去. 易见, 得到的新方程组与原方程组同解. 由于经过若干次行变换可以把任一矩阵变为简化阶梯矩阵, 从而可以得到方程组 (1.6.15) 的解. 这便是高斯消去法.

必须注意, 用高斯消去法解线性方程组时, 对增广矩阵只能用行变换, 如果采用列变换, 就不能保证所得的新方程组与原方程组同解 (为什么?) 了.

例 16 解方程组

$$\begin{cases} 2x + y + z - 5t = 2, \\ x + 3y + z + 2t = 4, \\ 2x - y + 6z - 2t = 17, \\ x + 2y + 5z - 5t = 6. \end{cases}$$

解 写出增广矩阵 B , 然后对它进行行变换:

$$\begin{aligned} B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & -2 & 17 \\ 1 & 2 & 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} & \xrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_2, L_3 - L_2 \\ L_2 - 2L_1, L_4 - L_1}]{L_1 \leftrightarrow L_2, L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -9 & -6 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_4, L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 5L_2}]{L_2 \leftrightarrow L_4, L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 17 & 11 \\ 0 & 0 & -21 & 26 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 - 7L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 17 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -93 & -93 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{(-\frac{1}{93})L_4, L_3 - 17L_4 \\ L_2 + 7L_4, L_1 - 2L_4}]{(-\frac{1}{93})L_4, L_3 - 17L_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-\frac{1}{3})L_3, L_2 - 4L_3 \\ L_1 - L_2}]{(-\frac{1}{3})L_3, L_2 - 4L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{(-1)L_2 \\ L_1 - 3L_2}]{(-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

最后得到的矩阵告诉我们, 原方程组的解是

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -1, \\ z = 2, \\ t = 1. \end{cases}$$

并且这就是原方程组的惟一解.

在用高斯消去法求齐次线性方程组时,可以省去常数列.

例 17 解方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - 2y + 4z = 0, \\ 2x + 5y - z = 0. \end{cases}$$

解 该方程组是齐次的,故可只对系数矩阵进行行变换.下面我们略去变换过程,只写出结果.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

上式表示,原方程组与下列方程组同解

$$\begin{cases} x + 2z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

于是,原方程组的解为

$$x = -2z, \quad y = z.$$

在这组解中, z 可以取任意数值,称为自由未知量.当 z 的取值确定了, x 与 y 也随之确定,因此该方程组有无穷多组解.这样得到的解是方程组的“通解”,或称为“一般解”.

2. 方程组解的存在性

在我们所考虑的非齐次线性方程组(1.6.15)中, m 与 n 的关系可以是 $m > n$ 、 $m = n$ 、 $m < n$ 中的任一种.在不同的情形,方程组的解会完全不同,有时会有惟一解,有时会有无穷多组解,有时还会无解.现在,我们证明关于(1.6.15)的解的存在性定理.

定理 1.6.15(非齐次方程组有解的充要条件) (i) 线性方程组(1.6.15)有解的充要条件是:系数矩阵 A 与增广矩阵 B 的秩相等,即 $r(A) = r(B)$;

(ii) 当 $r(A) = r(B) = n$ 时,(1.6.15)有惟一解;当 $r(A) = r(B) < n$, (1.6.15)有无穷多组解.

证 因 A 是 B 的一个子块,由矩阵秩的定义知, $r(A) \leq r(B)$.若对 B 施行行变换使其变为阶梯矩阵 B_1 ,则 A 也变为阶梯矩阵 A_1 ,并且 A_1 位于 B_1 的前 n 列.现在先证明(i).

(i) 若 $r(A) < r(B)$,则 A_1 的非零行的数目小于 B_1 的非零行的数目.于是 B_1 所对应的线性方程组中有一个方程具有下述形式

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = c,$$

这里 c 为非零常数,这是一个矛盾方程,显然方程组(1.6.15)无解.因此方程组

(1.6.15)有解时,必有 $r(A) = r(B)$.

反之,若 $r(A) = r(B) \equiv r$, 则 B_1 中非零行的第一个非零元素必定在 A_1 中. 继续对 B_1 施行行变换,使之成为简化阶梯矩阵 B_0 . 不失一般性,可设 B_0 的左上角为 r 阶单位阵,因为否则可以适当交换 B_0 的前 n 列中某些列的位置,使之变成左上角为 r 阶的单位阵,而这种列交换无非只改变了它所对应的方程组未知量的顺序而已,在不计方程组解的顺序的情况下是没有影响的. 设

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix}.$$

不难看出, B_0 所对应的方程组有解

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - c_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - c_{rn}x_n, \end{cases}$$

其中 $x_{r+1}, \dots, x_n$ 为自由未知量. 综上所述, (i) 得证.

(ii) 当 $r = n$ 时, 在方程组 (1.6.15) 的解中不含自由未知量, 故有惟一解. 当 $r < n$ 时, 至少有一个自由未知量, 故有无穷多组解. 定理得证.

由定理 1.6.16 可知, 非齐次线性方程组 (1.6.15) 的解可以有三种情形: 无解、有惟一解、有无穷多组解, 系数矩阵与增广矩阵的秩在判定方程组解的情况中起了重要的作用.

例 18 若 a, b, c, d 互不相等, 问线性方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2, \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \end{cases}$$

有没有解?

解 增广矩阵 B 的行列式 (范德蒙行列式)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \neq 0,$$

因此, B 的秩为 4, 而系数矩阵只有 3 列, 故 A 的秩不超过 3, 由定理 1.6.16 知方程组无解.

例 19 问 a 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

(1) 有惟一解、(2) 有无穷多组解、(3) 无解?

解 方程组的系数行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2.$$

(1) 若 $a \neq -2, a \neq -1$, 则 $|A| \neq 0$, 由克莱姆法则, 方程组有惟一解;

(2) 若 $a = 1$, 则增广矩阵 B 与系数矩阵 A 分别为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

显然它们的秩相等且等于 1, 都小于未知量个数 3, 因此方程组有无穷多组解;

(3) 若 $a = -2$, 则增广矩阵 B 为

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

它的三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

故 B 的秩为 3, 而系数矩阵 A 的行列式为 0, 所以 A 的秩小于 3, A 与 B 的秩不相等, 方程组无解.

将定理 1.6.16 用于齐次线性方程组, 我们有

定理 1.6.16(齐次方程组有解的充要条件) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.6.19)$$

有非零解的充要条件是: 系数矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的秩 r 小于未知量的个数 n , 即 $r < n$.

证 必要性 齐次线性方程组的系数矩阵 A 与增广矩阵 B 的秩总是相等的, 若 A 的秩等于 n , 则由定理 1.6.16 知, 方程组有惟一解, 即零解. 可见非零解存在时, A 的秩必小于 n .

充分性 若 A 的秩小于 n , 则由定理 1.6.16 知, 方程组有无穷多组解, 即除了零解以外, 还有其他的解, 那就是非零解.

有两个有用的推论.

推论 1.6.1 若齐次线性方程组的方程个数 m 小于未知量个数 n , 则齐次线性方程组必有非零解.

证 由 $r(A) \leq \min(m, n) < n$ 即知推论为真.

推论 1.6.2 若齐次线性方程组的方程个数 m 等于未知量个数 n , 则其存在非零解的充要条件是: 系数行列式 $|A| = 0$.

证 若 $|A| \neq 0$, 则 A 的秩为 $n (= m)$, 故方程组只有惟一的解, 即零解, 因此要有非零解, 必须 $|A| = 0$.

反之, 若 $|A| = 0$, 则 A 的秩小于 n , 由定理 1.6.17 知条件是充分的.

例 20 确定 λ , 使齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda + 4)x + y + 2z = 0, \\ (\lambda + 1)x + \lambda y + z = 0, \\ 3(\lambda + 2)x + (\lambda + 1)y + (\lambda + 4)z = 0 \end{cases}$$

有非零解, 并求出一般解.

解 首先计算系数行列式

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & \lambda & 1 \\ 3(\lambda + 2) & \lambda + 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 1 & 2 \\ \lambda + 1 & \lambda & 1 \\ \lambda + 1 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

按推论 1.6.2, 方程组有非零解的充要条件是 $\lambda(\lambda + 1)^2 = 0$, 即 $\lambda = 0$, 或者 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 0$ 时,

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

一般解为 $\begin{cases} x = -z, \\ y = 2z, \end{cases}$ 其中 z 为自由未知量;

当 $\lambda = -1$ 时,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

一般解为 $\begin{cases} x = -z, \\ y = z, \end{cases}$ 其中 z 为自由未知量.

3. 线性方程组解的结构

非齐次线性方程组(1.6.17), 即

$$Ax = b$$

的每一个解 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ 都可看作一个 n 维列向量

$$x = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T,$$

称为线性方程组的解向量.

相应的齐次线性方程组(1.6.19), 即

$$Ax = 0,$$

也称为(1.6.17)的导出方程组, 简称导出组, 其中 A 与 x 由(1.6.16)给出. 把给定的齐次线性方程组的解向量的全体所构成的集合称为解集, 记为 $\mathcal{S}$. 现在我们从向量与解集的角度来研究解的结构.

齐次线性方程组(1.6.19)的解集 $\mathcal{S}$ 的性质

性质 1 方程组(1.6.19)的任意两个解向量 α 与 β 之和 $\alpha + \beta$ 也是它的解向量, 亦即 $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ 蕴含 $\alpha + \beta \in \mathcal{S}$.

性质 2 方程组(1.6.19)的任意解向量 α 与任意常数 a 之积 $a\alpha$ 也是它的解向量, 亦即 $\alpha \in \mathcal{S}, a$ 为常数, 蕴含 $a\alpha \in \mathcal{S}$.

这两个性质的证明是显然的. 由此可知, 方程组(1.6.19)的任意两个解向量的线性组合也是它的解向量. 另一方面, 任一向量组中的向量均可表示成该向量组的极大无关组的线性组合, 于是, 若能找到方程组(1.6.19)解集的一个极大线性无关组, 它的解集就能完全确定了.

定义 1.6.14(基础解系) 齐次线性方程组(1.6.19)的解集 $\mathcal{S}$ 的任一极大线性无关组称为该方程组的基础解系.

于是, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是齐次线性方程组(1.6.19)的基础解系, 则如下线性组合

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s \quad (k_1, k_2, \dots, k_s \text{ 为任意常数}) \quad (1.6.20)$$

给出了(1.6.19)的所有解, 我们称其为(1.6.19)的通解.

求基础解系的方法

据定理 1.6.16, 方程组(1.6.19)的系数矩阵 A 的秩 r 小于方程组未知量的个数 n , 因此可将 A 经过行变换(以及对调两列的变换, 此时可能改变未知量的次序, 使用时请牢记这一点! 以下为叙述方便起见, 假设已经将未知量重新排序, 使得以下系数矩阵就对应于新的未知量)变成具有下述形式的简化阶梯矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ & & & 0 & & \end{bmatrix}. \quad (1.6.21)$$

于是, $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 是 $n-r$ 个自由未知量. 将这些自由未知量写为向量形式 $(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n)$, 并依次取值为

$$\begin{aligned} (x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n) &= (1, 0, \cdots, 0), \\ (x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n) &= (0, 1, 0, \cdots, 0), \\ &\cdots \cdots \cdots \\ (x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n) &= (0, 0, \cdots, 1), \end{aligned}$$

从这 $n-r$ 个向量值, 相应得到(1.6.19)的 $n-r$ 个解向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$ 是下列矩阵的列向量

$$\begin{bmatrix} -c_{1,r+1} & \cdots & -c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_{r,r+1} & \cdots & -c_{rn} \\ 1 & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \equiv [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_{n-r}]. \quad (1.6.22)$$

这个矩阵的前 r 行恰由矩阵(1.6.20)右上角的 $r \times n$ 子块改号得到, 它的后 $n-r$ 行是一个 $n-r$ 阶单位阵. 容易看出, 矩阵(1.6.21)的秩为 $n-r$, 因为它有一个 $n-r$ 阶单位阵的子块, 所相应的子行列式的值为 1. 于是, 方程组(1.6.19)的这 $n-r$ 个解向量

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$$

线性无关, 它们可取作方程组(1.6.19)的基础解系, 这是因为对方程组(1.6.19)的任意一组解

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n),$$

若自由未知量 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 分别取值为任意常数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$, 由(1.6.22)可知, 前 r 个未知量 x_i ($1 \leq i \leq r$) 应为

$$x_i = -k_1 c_{i,r+1} - k_2 c_{i,r+2} - \cdots - k_{n-r} c_{i,n}.$$

这表明

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \cdots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n) \\ &= (-k_1 c_{1,r+1} - k_2 c_{1,r+2} - \cdots - k_{n-r} c_{1,n} - \\ &\quad k_1 c_{2,r+1} - k_2 c_{2,r+2} - \cdots - k_{n-r} c_{2,n}, \cdots, - \\ &\quad k_1 c_{r,r+1} - k_2 c_{r,r+2} - \cdots - k_{n-r} c_{r,n}, k_1, \cdots, k_{n-r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k_1 \begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + k_{n-r} \begin{bmatrix} -c_{1,n} \\ -c_{2,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{n-r} \alpha_{n-r}.
\end{aligned}$$

从而我们得到如下定理.

定理 1.6.17 (基础解系中向量的个数) 若齐次线性方程组(1.6.19)系数矩阵的秩 r 小于未知量的个数 n , 即 $r < n$, 则(1.6.19)必有基础解系, 并且基础解系中含有 $n-r$ 个向量.

例 21 求下列线性方程组的通解, 并给出它的一个基础解系

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解 对系数矩阵施行行变换, 为节省篇幅, 我们省略中间过程, 只写出最终的矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取 x_2, x_3 为自由未知量, 得到通解为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3, \\ x_4 = -3x_2 - 2x_3, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

取 (x_2, x_3) 分别为 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$, 便得到一个基础解系

$$\alpha_1 = (2, 1, 0, -3, 0)^T, \quad \alpha_2 = (3, 0, 1, -2, 0)^T,$$

借助于基础解系, 通解又可表示为 $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

在结束本节之前, 我们讨论非齐次线性方程组(1.6.17)的通解.

定理 1.6.18 (非齐次方程组的通解) 设 β 是非齐次线性方程组(1.6.17)的一个已知解, 称为(1.6.17)的一个特解; 又设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 是相应的齐次线

性方程组(1.6.19)的一个基础解系,则方程组(1.6.17)的通解为

$$x = \beta + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_s \alpha_s, \quad (1.6.23)$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为任意常数.

证 先证明(1.6.23)中的 x 是方程组(1.6.17)的解. 以 $x = \beta + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_s \alpha_s$ 代入方程组(1.6.17): $Ax = b$, 得到

$$\begin{aligned} A(\beta + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_s \alpha_s) &= A\beta + k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 + \cdots + k_s A\alpha_s \\ &= A\beta + 0 + 0 + \cdots + 0 = b. \end{aligned}$$

故(1.6.23)是(1.6.17)的解.

其次证明(1.6.17)的任一个解都可以用确定(1.6.23)中常数的方法来表示. 事实上, 设 γ 是(1.6.17)的任一个解, 作差 $x = \gamma - \beta$, 并将其代入(1.6.19), 则得

$$Ax = A(\gamma - \beta) = b - b = 0,$$

于是, $\gamma - \beta$ 是(1.6.19)的解, 由基础解系的定义知, 存在常数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$$\gamma - \beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_s \alpha_s,$$

从而 γ 可由(1.6.23)表示. 这就是要证明的.

综上所述, 为求非齐次线性方程组(1.6.17)的通解, 只需求出齐次线性方程组(1.6.19)的一个基础解系, 并求出非齐次线性方程组(1.6.17)的一个特解.

(1.6.17)的特解并不难求, 只要对它的增广矩阵 B 进行行变换, 使之化为简化阶梯矩阵, 当确定了自由未知量后, 令所有的自由未知量均取 0, 得到的解就是(1.6.17)的一个特解了. 又因为(1.6.19)的基础解系也可由简化阶梯矩阵获得, 因此通过对增广矩阵的行变换可以同时完成求基础解系与求特解的工作.

例 22 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} p \\ 4 \\ 0 \\ q \end{bmatrix}.$$

试问非齐次线性方程组 $Ax = b$ 当 p, q 为何值时有解? 有解时, 求出齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 并给出非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的通解.

解 对增广矩阵 B 施行行变换, 为节省篇幅, 略去中间过程.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & q \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 4-3p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-4p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q \end{bmatrix}.$$

故 $r(A)=2$. 为使方程组有解, 必须 $r(B)=2$, 于是, p, q 当满足

$$4-4p=0, \quad p+q=0.$$

解得 $p=1, q=-1$. 所以, 仅当 $p=1, q=-1$ 时方程组有解. 以此 p, q 值代入 B , 并继续进行初等行变换, 得

$$B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

取 x_2, x_4 为自由未知量, 写出齐次方程组的解 x_1, x_3 用自由未知量的表示

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_4, \\ x_3 = -2x_2 - 3x_4; \end{cases} \quad (1.6.24)$$

以及非齐次方程组的解 x_1, x_3 用自由未知量的表示

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_4 + 2, \\ x_3 = -2x_2 - 3x_4 - 1; \end{cases} \quad (1.6.25)$$

分别令

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

以此分别代入(1.6.24), 得到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2 \cdot 0 = 1, \\ x_3 = -2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -2, \end{cases} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2 \cdot 1 = 2, \\ x_3 = -2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 1 = -3, \end{cases} \end{aligned}$$

从而齐次线性方程组的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (1, 1, -2, 0)^T, \quad \alpha_2 = (2, 0, -3, 1)^T.$$

再令自由未知量 $x_2=0, x_4=0$, 代入(1.6.25), 得非齐次线性方程组的一个特解 $\beta = (2, 0, -1, 0)^T$. 于是, 问题的通解为

$$x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \beta.$$

注意到, 由于基础解系与特解都不是惟一的, 因此通解的表示式也不是惟一的. 另一方面, 用以上矩阵方法求解线性方程组, 在理论上解决了解的存在性, 在实际应用中也给出了解的具体表示, 是很漂亮而且有效的方法. 但是当方程组个数或未知量个数较多时, 计算量是十分庞大的. 一种解决的办法是借助于计算机进行计算, 目前这种方法及其发展已经成为数学科学的一个重要分支——数值分析——所要解决的课题之一.

在本书第六章中, 我们还要从近代数学的高度来介绍代数学中的一些概念

与思维方法.

习 题

1. 已知向量 $\alpha = (0, 1, -1)$, $\beta = (1, 2, -1)$, $\gamma = (1, 0, 2)$, 求 3α , $\alpha + \beta$, $2\alpha - 3\beta + \gamma$.
2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 求 $2A$, $A + B$, $2A - 3B$, $A^2 + B^2$, $AB - BA$, $(AB)^2$.
3. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 AB^T , BA^T , $A^T B$, $B^T A$.
4. 设 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, 求 (1) $e_1 A$; (2) $e_2 A$; (3) $e_3 A$.
5. 求 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$, n 为自然数.
6. 计算 $\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^n$, 并利用这个结果计算 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^4$.
7. 求证两个 n 阶的上三角阵的积也是上三角阵.
8. 已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $A = \alpha^T \beta$, 求 A^n .
9. 求与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 关于乘法可交换的所有矩阵.
10. 若二阶方阵 B 与任何二阶方阵关于乘法都可交换, 求证 B 必为数量矩阵(对角元相等, 其余元素均为零的方阵称为数量矩阵).
11. 若 $A^T = A$, 称 A 为对称矩阵. 设 A 与 B 都是对称矩阵, 求证 $AB = BA$ 的充要条件是 AB 也是对称矩阵.
12. 设方阵 B, C 关于乘法都与 A 可交换, 求证 $B + C, BC$ 也都与 A 可交换.
13. 已知 A 为对角阵, 且对角元两两不相等, B 为 A 的同阶方阵, 若 $AB = BA$, 求证 B 为对角阵.
14. 设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 证明 $AB - BA$ 的对角元之和必为零.
15. 若 $B^T = -B$, 则称矩阵 B 为反对称矩阵. 已知 A 是 n 阶对称矩阵(见第 11 题), B 为 n 阶反对称矩阵, 求证
 - (1) A^2 与 B^2 均为对角矩阵;
 - (2) $AB - BA$ 是对称矩阵, $AB + BA$ 也是反对称矩阵;
 - (3) AB 为反对称矩阵的充要条件是 $AB = BA$.
16. 试利用伴随矩阵求下列方阵的逆阵:
 - (1) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$;
 - (2) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.
17. 求证初等阵可逆, 并给出它们的逆阵.

18. 设 A 为奇数阶方阵, 且 $|A|=1, A^T=A^{-1}$, 试证 $I-A$ 不可逆.

19. 若 A, B 是 n 阶矩阵, 且 $I+AB$ 可逆, 求证 $I+BA$ 也可逆, 且

$$(I+BA)^{-1} = I - B(I+AB)^{-1}A.$$

20. 若 n 阶矩阵 A 满足方程 $A^2 - 2A + 3I = 0$, 求证 A 可逆, 并求 A^{-1} .

21. 试用矩阵的初等变换计算下列矩阵的逆阵:

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

22. 利用分块矩阵的乘法计算 AB , 其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

23. 利用分块矩阵求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 的逆阵.

24. 设 A 与 B 分别为 m 阶与 n 阶的可逆阵, C 为 $m \times n$ 矩阵, 求证分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的逆阵为 $\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$.

25. 利用上题结果计算矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆阵. (提示: 取 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}).$$

26. 证明 n 个 n 维向量组 $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ 线性无关.

27. 一个向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 构成的向量组何时线性相关? 何时线性无关?

28. 若向量 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 求证表示法唯一的充要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

29. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 问 (1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表出? (2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 为什么?

30. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 3), \alpha_3 = (1, 3, t)$. 问当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (1) 线性无关? (2) 线性相关?

31. 求下列矩阵的秩:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

32. 判定下列各组向量是否线性相关:

$$(1) \alpha = (2, 3, -2.5, 1), \beta = (3, -1.2, 0.4), \gamma = (4, -5.6, -5, 7).$$

$$(2) \alpha = (1, -2, 3, -1), \beta = (2, -1, 2, 2), \gamma = (3, 1, 2, 3).$$

$$(3) \alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}), \alpha_3 = (1, 2^2, 3^2), \alpha_4 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right).$$

33. 若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 均可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示, 求证向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的秩不超过向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的秩.

$$34. \text{试问 } t \text{ 为何值时, 矩阵 } \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 的秩为 } 2?$$

35. A 是 $m \times n$ 矩阵, 求证 A 的秩等于零或 1 的充要条件是存在 m 维列向量 β 与 n 维行向量 α , 使得 $A = \beta\alpha$.

36. 若 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 求证 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

37. 若 A 是 $m \times k$ 矩阵, B 是 $k \times n$ 矩阵, 求证 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

$$38. \text{若实数 } a, b, c, d \text{ 不全为零, 求证方程组 } \begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ bx - ay + dz - ct = 0 \\ cx - dy - az + bt = 0 \\ dx + cy - bz - at = 0 \end{cases} \text{ 只有零解.}$$

39. 用高斯消元法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 2x + 3y + 8z = 4, \\ 3x + 2y + 17z = 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y - 3z + 2w = 2, \\ 2x + 5y - 8z + 6w = 5, \\ 3x + 4y - 5z + 2w = 4; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x + 2y + 2z = 2, \\ 3x - 5y - z = 5, \\ 2x - 5y + 3z = -4, \\ x + 4y + 6z = 0. \end{cases}$$

40. 确定 λ 的值, 使下列含有未知数 x, y, z 的方程组 (a) 无解; (b) 有多个解; (c) 有惟一解.

$$(1) \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + \lambda z = 3, \\ x + \lambda y + 3z = 2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2. \end{cases}$$

41. 问 a, b, c 应满足什么条件, 才能使下列方程组有解? 能否有惟一解?

其中 α_i^T 表示列向量 α_i 的转置 ($i=1,2,\cdots,n$).

48. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 设 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \beta_{r-1} = \alpha_{r-1} + \alpha_r, \beta_r = \alpha_r + \alpha_1$, 求证: 当且仅当 $r(>1)$ 为奇数时, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关.

49. 若 A 是一个 $m \times k$ 矩阵, B 是 $k \times n$ 矩阵, $AB=0$, 求证 $r(A) + r(B) \leq k$.

50. 若 A 是一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 求证 $r(A) + r(A - I) = n$.

51. 若 A 是一个 n 阶矩阵, 且 $A^2 = I$, 求证 $r(A + I) + r(A - I) = n$.

第二章 导数

——函数的分析与研究 I

第二章介绍经典微积分的第一个主要内容:导数与微分. § 2.1 简要概述高等数学的研究对象与函数分析的方法; § 2.2 详细讲解微积分的基本概念——极限. 在此基础上, § 2.3~§ 2.6 中从求瞬时速度与曲线切线问题出发引入导数概念, 求导法则, 微分, 以及导数、微分的物理与几何应用. 之后, 在 § 2.7 中以多元函数的微分以及其与一元情形的相同点和不同点为主线, 介绍偏导数, 全微分, 方向导数及其应用, 达到学习多元、巩固一元的目的.

§ 2.1 引言

自然界千变万化的事物, 是自然科学的研究对象, 数学则是最重要的研究工具. 数学的思维方法是把千变万化的事物与“变量”联系起来, 也就是把事物量化, 用“变化的量”来表示; 然后把参加变化的变量分为两大类: 一类是独立变化的, 称为自变量, 另一类随自变量的变化而变化, 称为因变量. 确定因变量随自变量变化的方式, 或规律, 称为函数关系, 通常也把因变量称为自变量的“函数”. 以后的事便是对函数关系进行分析与研究.

最简单的函数关系是由一个自变量按给定规律确定一个因变量. 此时我们记自变量为 x , 因变量为 y , y 随 x 的变化规律记为

$$y = f(x), \quad (2.1.1)$$

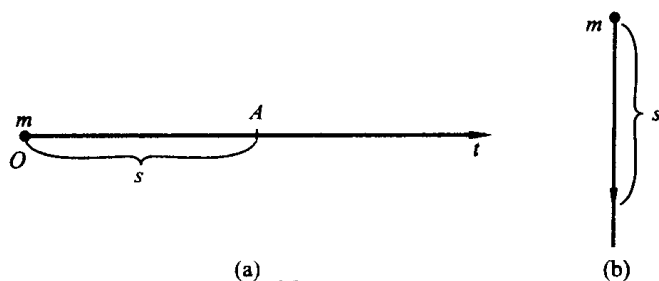
这里 f 表示相应的函数关系(对于“函数”, 其严格定义将在定义 2.1.1 给出).

看一个例子. 假设运动质点 m 从原点 O 出发作直线运动, 当 m 运动到点 A 时, 所走距离 s 显然随时间 t 而变化, t 是自变量, s 为因变量, 其变化规律记为 $s = s(t)$. 由中学物理教程知道, 当 m 作匀速直线运动时, $s = vt$, v 是其速度(图 2.1.1(a)).

但是如果质点 m 从离地面某一高处自由落下, 经过时间 t 落下的距离为 s , 则 s 与 t 之间的关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad (2.1.2)$$

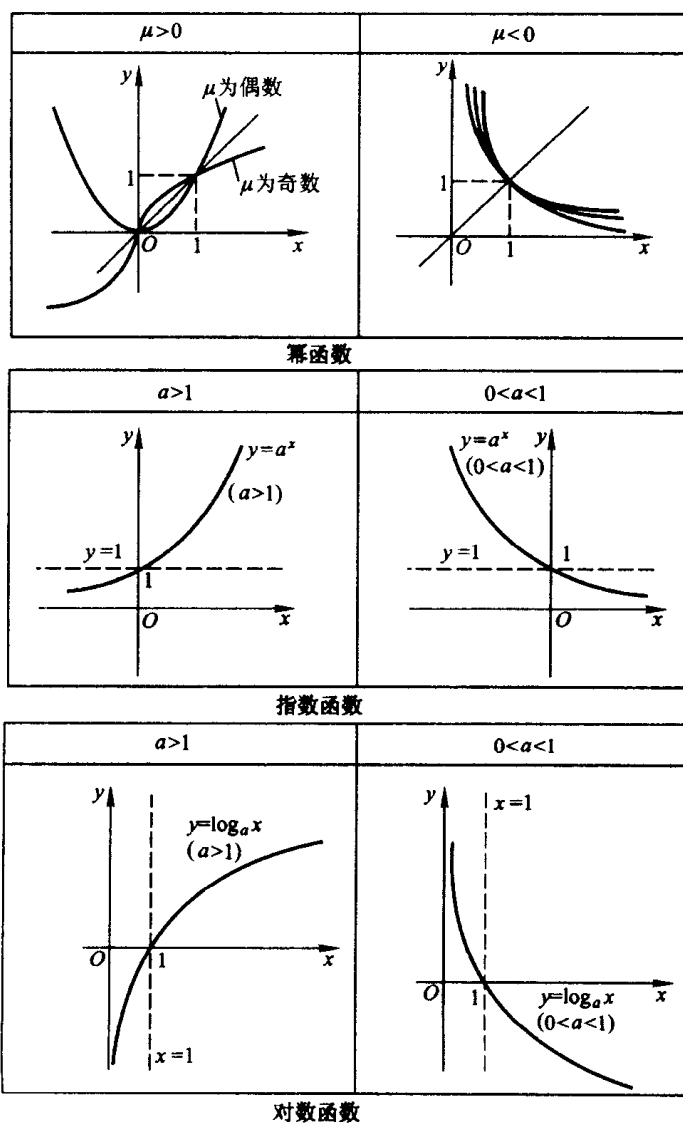
其中 g 为重力加速度(图 2.1.1(b)). 于是我们看到, 质点 m 作不同的直线运

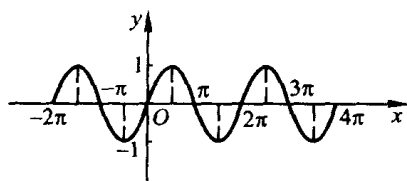


(a) 图 2.1.1

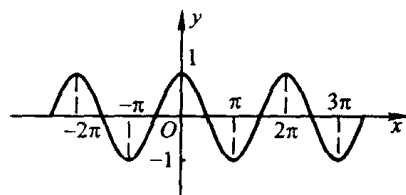
动, 距离 s 与时间 t 的函数关系也不同.

中学数学中我们学习了许多函数关系, 归纳并分类, 称以下六种为基本初等函数(图 2.1.2):

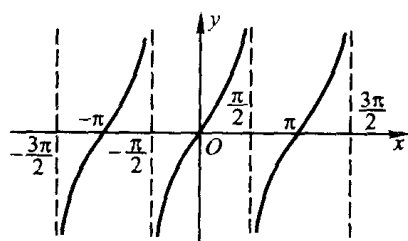




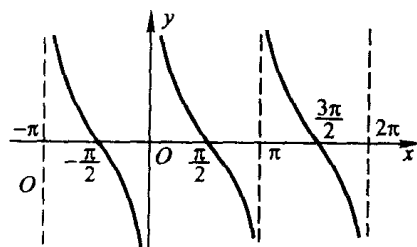
正弦函数



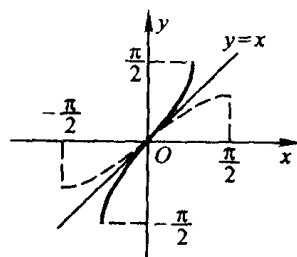
余弦函数



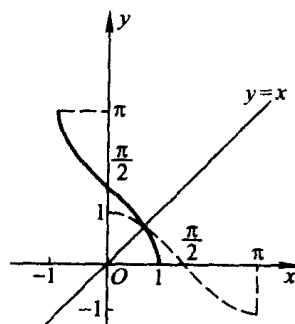
正切函数



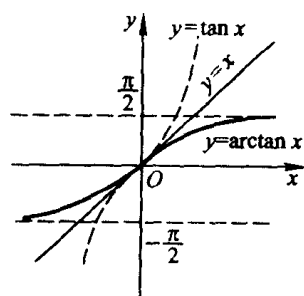
余切函数



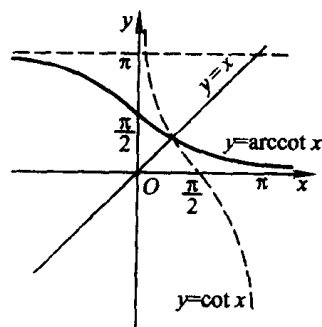
反正弦函数



反余弦函数



反正切函数



反余切函数

图 2.1.2

1. 多项式及分式

n 次多项式: $y = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n, \cdots, a_0$ 为常数, n 为自然数;

分式: $y = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$, a_i, b_j 为常数, n, m 为自然数.

2. 幂函数 $y = x^\mu$, μ 为常数.

3. 指数函数 $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.

4. 对数函数 $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.

5. 三角函数 $y = \sin x, \cos x, \tan x$, 等.

6. 反三角函数 $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x$, 等.

从以上这些基本初等函数的表达式可看到, 它们并非对自变量 x 的任何值都有意义, 例如 $y = \log_a x$ 对于 $x \leq 0$ 就没有意义. 因此研究函数还必须考虑变量的变化范围.

本章 § 2.1 ~ § 2.6 中所研究的变量, 其变化范围通常记为 X, Y, Z 等等, 都是实数轴 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ 或 $\mathbf{R}$ 子集, 例如闭区间 $[\alpha, \beta]$ 是大于或等于 α 、小于或等于 β 的全体实数

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R}: \alpha \leq x \leq \beta, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\},$$

开区间 (α, β) 是大于 α 、小于 β 的全体实数

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R}: \alpha < x < \beta, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\},$$

左闭右开区间是

$$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R}: \alpha \leq x < \beta, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\},$$

同样, $(\alpha, \beta], (-\infty, \beta], (-\infty, \beta), [\alpha, +\infty), (\alpha, +\infty)$ 等也是 $\mathbf{R}$ 子集.

现在我们给出(一元)函数的严格数学定义.

定义 2.1.1(函数) 设两个变量 x 与 y 分别在集合 X 与 Y 中变化. 如果按照一个给定的对应规则, 对于每个 $x \in X$, 有惟一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 y 为 x 的函数, 并称 y 为因变量, x 为自变量, 记为 $y = f(x)$.

函数 $y = f(x)$ 的自变量 x 的变化范围 X 称为函数的定义域, 记为 $X = D_f$; 因变量 y 的变化范围 Y 称为函数的值域, 记为 $Y = R_f$.

注 (1) 函数定义中有三个要点: 定义域、值域、对应规则. 请读者自行写出基本初等函数的定义域与值域.

(2) 在函数的对应规则中, 强调了“对于每一个 $x \in X$, 有惟一确定的 $y \in Y$ 与之对应”, 但是有可能对于不同的 $x \in X$, 却对应于同一个 $y \in Y$, 三角函数就是如此.

我们定义“一一对应”的函数关系, 是指: 不同的 $x \in D_f$ 对应于不同

的 $y \in R_f$.

由此定义可知,“一一对应”是每一个 $y \in R_f$ 也只能有惟一的一个 $x \in D_f$, 使得 $y = f(x)$.

自变量与因变量之间的函数关系,除了用基本初等函数以及它们之间的运算表示外,还可以用列出表格与画出图像的方式给出,这在自然科学与社会科学研究领域中、国民经济与工农业生产等企事业单位中是常见的.我们下面讨论由基本初等函数经过四则运算、复合(迭置)、反函数等变换后得到的函数关系.

设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 为给定的函数,它们的四则运算、复合与反函数定义如下.

(i) 函数的四则运算

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta g(x), & \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad x \in D_f \cap D_g, \\ f(x)g(x), & \quad x \in D_f \cap D_g, \\ \frac{f(x)}{g(x)}, & \quad g(x) \neq 0, \quad x \in D_f \cap D_g, \end{aligned}$$

(ii) 函数的复合(迭置)

若 $R_f \subset D_g$, 称 $h(x) \equiv g(f(x))$ 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合(迭置).

(iii) 函数的反函数

设函数 $f: D_f \rightarrow R_f$ 是 D_f 到 R_f 的一一对应的函数关系,也就是,

$$x_0 \in D_f \xrightarrow{1-1} y_0 \in R_f, \text{ 使 } y_0 = f(x_0).$$

显然, $f(D_f) = R_f$. 于是,对于每一个 $y_0 \in f(D_f)$, 必有惟一的 $x_0 \in D_f$ 与该 y_0 相对应,记为 $x_0 = g(y_0)$, 亦即

$$y_0 \in f(D_f) \xrightarrow{1-1} x_0 \in D_f, \text{ 使 } x_0 = g(y_0),$$

并满足 $y_0 = f(x_0)$, 则我们称函数 g 为 f 的反函数. 函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = g(y)$ 常记为 $y = f^{-1}(x)$.

按反函数的定义,对数函数是指数函数的反函数,反三角函数是三角函数的反函数,等等.

熟记基本初等函数的定义域与值域,利用中学数学中关于函数的知识(例如奇偶函数、周期函数、…),通过练习题,读者便能理解函数的定义,并能确定函数的定义域与值域.在本教材以后的章节中,读者将不断遇到各种函数,更会巩固与加深对函数概念的理解与应用.

习 题

1. 求下列实函数的定义域:

$$(1) y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(2) y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$$

$$(3) y = \sqrt{\cos(x^2)}$$

$$(4) y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$$

$$(5) y = \arcsin(1-x) + \log(\log x)$$

2. 求下列实函数的值域:

$$(1) y = \ln(1 - 2\cos x)$$

$$(2) y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}$$

3. 已知实函数的定义域为 $[0, 1]$, 求 $f(x+a) + f(x-b)$ 的定义域.

4. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 求 $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right)$.

5. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f(f(x)), f(f(f(x)))$.

6. 设 $\underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_n$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

7. 求 $\varphi(\varphi(x)), \psi(\psi(x)), \varphi(\psi(x)), \psi(\varphi(x))$, 设

$$(1) \varphi(x) = x^2, \psi(x) = 2^x$$

$$(2) \varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0, \\ x, & \text{当 } x > 0, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0, \\ -x^2, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

8. 设 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, $a > 0$, 试证: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

9. 设函数 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $x = a, x = b (b \neq a)$ 对称, 求证 $f(x)$ 为周期函数.

10. 证明: 对于 $\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 任何有理数皆为 $\chi(x)$ 的周期.

§ 2.2 极 限

“极限”是高等数学中最基本的概念, 在理论研究与实际应用中几乎到处会遇到. 现阶段又是贯穿微积分学的一条基线. 本节引入其严格数学定义及基本性质.

2.2.1 数列的极限

通常称自变量为正整数的函数为数列, 记为 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ 等. 例如,

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = 1 + \frac{2}{n^2}, \quad z_n = n^3, \quad w_n = (-1)^n, \quad (2.2.1)$$

以上式中 $n = 1, 2, \cdots$. 图 2.2.1 是数列 $\{x_n\}$ 在实轴上的表示.

经常遇到这样的问题: 当自变量 n 取正整数列 $1, 2, \cdots$, 而且 n 变得愈来愈

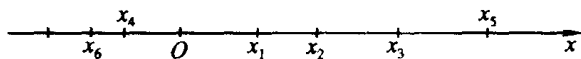


图 2.2.1

大时,数列 $\{x_n\}$ 如何变化?

(2.2.1)式中的4个数列,当 n 变得愈来愈大时所表现的变化趋势很不相同, $x_n = \frac{1}{n}$ 愈变愈“靠近”0, $y_n = 1 + \frac{2}{n^2}$ 愈变愈“靠近”1, $z_n = n^3$ 愈变愈大, $w_n = (-1)^n$ 却在 +1 与 -1 上来回跳动. 我们分别称: 当 n 趋向于无穷大(记为 $n \rightarrow +\infty$) 时, $x_n = \frac{1}{n}$ 以 0 为极限、 $y_n = 1 + \frac{2}{n^2}$ 以 1 为极限、 $z_n = n^3$ 没有有限极限但以 $+\infty$ 为极限、 $w_n = (-1)^n$ 却没有极限.

我们用严格的数学定义来刻画“极限”.

定义 2.2.1 (数列的极限) 称数列 $\{x_n\}$ 以有限数 a 为极限, 如果对于任给的正数 $\epsilon > 0$ (无论它多么小), 必定存在正整数 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$. 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a. \quad (2.2.2)$$

定义 2.2.1 是极限的“ $\epsilon - N$ ”刻画, 它表明, $\mathbf{R}$ 中的数列 x_n 以常数 a 为极限, 是指, 当 n 不断增大时, 数列 x_n 不断变化, 并且“任意地靠近”一个固定的常数 a , 特别注意: (1) 极限定义中的“靠近”, 是用 $\mathbf{R}$ 中的点之间的距离 $\rho(x_n, a) = |x_n - a|$ 来衡量的; (2) 定义中要求数列 x_n 与常数 a “任意”靠近, 是用“对于任给的正数 $\epsilon > 0$ (无论它多么小)”来表示的; (3) 定义中“ n 愈变愈大”, 体现在“必存在正整数 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时”, 这表示 n 可以是大于 N 的任意大的正整数. 这就是数列极限的精确刻画, 称为 $\epsilon - N$ 语言(见图 2.2.2.).

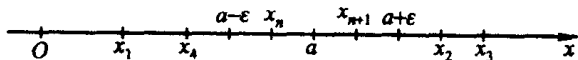


图 2.2.2

例 1 用数列极限的定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} = 0$.

证 对任给的 $\epsilon > 0$, 要使

$$\left| \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \epsilon,$$

只要 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$, 即只要 $n > \frac{1}{\epsilon^2}$. 于是取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon^2} \right]$ ($[x]$ 是不超过 x 的最大整数), 则

当 $n > N$ 时, 就有 $\left| \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \epsilon$ 成立, 故例 1 的结论得证.

例 2 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, a > 0$, 试证存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$.

证 在数列极限定义中, 取 $\epsilon = \frac{a}{2}$, 则存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2},$$

因此, 有

$$|x_n| > a - |x_n - a| > \frac{a}{2} > 0,$$

结论得证.

例 3 早在我国春秋战国时期, 庄子就曾说过: “一尺之锤, 日取其半, 万世不竭”, 这可表示成极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

事实上, 只要取 $N = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$ 即可.

2.2.2 函数的极限

现在考察当自变量 $x \in D_f$ 任意靠近一个常数 a 时, 函数 $f(x)$ 是如何变化的.

由数列情形启发我们考虑同样的问题: 在自变量变化并且 ‘任意靠近’ 常数 a 的过程中, 按函数关系得到的因变量 (函数) $y = f(x)$ 是否可以 ‘任意地靠近’ 某个常数 (极限) A ?

函数极限严格的数学定义如下.

定义 2.2.2 (函数的极限) 设 A 与 a 为有限数. 如果对于任给的正数 $\epsilon > 0$ (无论它多么小), 必定存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon, \quad (2.2.3)$$

则称 $f(x)$ 当 x 趋向于 a (但 $x \neq a$) 时以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \quad (2.2.4)$$

这是函数极限的精确刻画, 称为 $\epsilon - \delta$ 语言.

我们还常用邻域方式表示极限.

把与 a 之间距离小于 δ 的点 x 的全体称为 a 的 δ 邻域, 记为

$$U_\delta(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x - a| < \delta\}.$$

易见, δ 愈小, x 与 a 愈靠近. 现在我们用 ‘邻域’ 来描述极限.

如果任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $x \in (U_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D_f$, 就有 $f(x) \in U_\epsilon(A)$, 则称 $f(x)$ 当 x 趋向于 a (但 $x \neq a$) 时以 A 为极限 (图 2.2.3).

若极限存在,则它是惟一的(请读者自己证明).

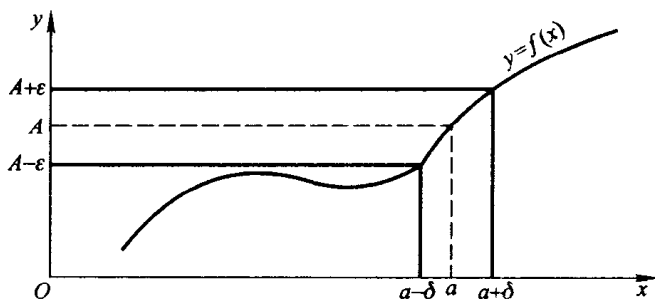


图 2.2.3

例 4 用函数极限的定义证明 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{1+x} = 2$.

证 因为

$$|\sqrt{1+x} - 2| = \frac{|x-3|}{\sqrt{1+x}+2} < \frac{|x-3|}{2},$$

故任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|\sqrt{1+x} - 2| < \epsilon$, 只要 $|x-3| < 2\epsilon$. 取 $\delta = 2\epsilon$, 即 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 有 $|\sqrt{1+x} - 2| < \epsilon$ 成立. 这就是要证明的.

例 5 用函数极限的定义证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x = 1$.

证 任给 $\epsilon > 0$, 不妨设 $\epsilon < 1$, (因为若对某个 $\epsilon > 0$, (2.2.3) 成立, 则对大于此 ϵ 的任何正数, (2.2.3) 式更能成立). 由于

$$\left| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x - 1 \right| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \epsilon < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x < 1 + \epsilon,$$

即

$$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1 + \epsilon) < x < \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1 - \epsilon).$$

取 $\delta = \min\{-\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1 + \epsilon), \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1 - \epsilon)\}$, 则当 $0 < |x| < \delta$ 时, 得到 $\left| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x - 1 \right| < \epsilon$ 成立, 故此题得证.

例 6 自由落体运动

一物体从离地面 h 的高度自由落下, 如果经过时间 t 落下的距离为 s , 其函数关系为 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 其中 g 是重力加速度, 试求时间 t 趋向于 t_0 时, 物体下落的距离是多少?

解 由物理学知识, 可设物体从 h 高度落到地面的时间是 T , 所以函数 $s =$

$\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域为 $D_s = [0, T]$. 对于 $0 < t, t_0 \leq T$, 当 t 愈靠近 t_0 时, 落体的位置愈靠近 $\frac{1}{2}gt_0^2$, 也就是

$$\left| \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 \right|$$

变得愈小. 因此,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt_0^2.$$

由定义 2.2.2, 我们可以证明这个事实. 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 为了使

$$\left| \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 \right| = \frac{g}{2}|t - t_0||t + t_0| \leq gT|t - t_0| < \epsilon, \quad (2.2.5)$$

只要取 $\delta = \frac{\epsilon}{gT}$, 就能满足 (2.2.5) 的要求, 这里 T 是自由落体落地所需的时间.

注 1 类似地可定义单边极限: 定义 2.2.2 中的 x 仅取在 a 的左边或右边时, 所得极限称为左极限或右极限, 统称单边极限. 定义如下:

左极限: 任给 $\epsilon > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 使得 $0 < a - x < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$;

右极限: 任给 $\epsilon > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 使得 $0 < x - a < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 并分别记为:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A, \quad (2.2.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A. \quad (2.2.7)$$

注 2 当自变量以无穷大 ($a = \infty$) 为极限, 函数的极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 为有限时, $\epsilon - \delta$ 语言成为 $\epsilon - M$ 语言:

任给 $\epsilon > 0$, 必存在 $M > 0$, 使当 $|x| > M$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$. 对于 $x \rightarrow a = +\infty, -\infty$ 情形, 或极限 $A = \infty, +\infty, -\infty$ 情形都可类似地定义 (见习题).

2.2.3 极限运算及判别准则

判断极限是否存在, 极限值如何求, 是较为复杂的问题. 我们介绍几种运算法则与判断准则, 以便运算、求值、或判断极限的存在.

以下都假设所论极限 a 与 A 均为有限数. 在极限为无穷时, 结论是否成立, 要另行讨论.

1. 极限的四则运算

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 都存在并且为有限数, 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad (2.2.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad (2.2.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \div g(x)] = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) \div (\lim_{x \rightarrow a} g(x)); \quad (2.2.10)$$

式(2.2.10)中, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

以上四则运算对于数列情形同样成立.

2. 极限存在的判断准则

(1) 用左、右极限判断

极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在的充分必要条件是左、右极限同时存在, 且相等,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

或简记为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A.$$

(2) 用数列极限判断

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 存在, 则对自变量 x 趋于 a 的任一子数列 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 其相应的函数序列 $\{f(x_n)\}$ 必以 A 为极限, 亦即, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$; 反之, 若对自变量 x 的以 a 为极限的任意子数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 相应的函数序列 $\{f(x_n)\}$ 均有相同的极限 A , 则当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, 且等于 A .

或简记为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A, \text{ 其中 } \{x_n\} \text{ 是任意子数列, 且 } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

3. 夹逼定理

若在 a 点的某邻域内成立不等式:

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$.

4. 单调函数的极限

有一类函数, 它们的极限存在, 且可设法求得. 这就是单调函数类.

单调函数 称函数 $f(x)$ 为单调函数, 如果它满足如下条件:

对于定义域中的任意两点 $x, x' \in D_f$, 若 $x > x'$ 蕴含 $f(x) > f(x')$ (增函数), 或蕴含 $f(x) < f(x')$ (减函数).

称函数 $f(x)$ 为广义单调函数, 如果它满足如下条件:

若 $x > x'$ 蕴含 $f(x) \geq f(x')$ (广义增函数), 或 $f(x) \leq f(x')$ (广义减函数).

定理 2.2.1 (单调函数的反函数) 在 D_f 上的单调函数 $f(x)$ 是 D_f 到 R_f 上的一一对应. 从而可知, 单调函数一定存在反函数 f^{-1} , 并且 $f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$ 也是单调的.

由单调函数的定义出发,作简单推理便可得到定理的证明.

但是,广义单调函数却没有上述性质,为什么,请读者思考.

有界函数 若存在常数 $M > 0$,使得对 $x \in D_f$ 中任一 x 均有 $|f(x)| \leq M$,则称 $f(x)$ 为有界函数,并称 M 为 $f(x)$ 的界.不难看出,函数的有界性不等式可写为 $-M \leq f(x) \leq M$.

同样,可分别定义函数有上界与有下界.并可证明,函数有界的充分必要条件是:它既有上界又有下界.把这证明留给读者.

我们叙述上、下确界的存在性定理.

定理 2.2.2(确界的存在性) 有上界的实数集合,必定有最小上界,称此最小上界为集合的上确界;类似地,有下界的实数集合,必定有最大下界,称此最大下界为集合的下确界.

这个定理从直观上看是明显的,但严格的数学证明比较复杂,在此从略.

现在证明单调函数极限的存在性.

定理 2.2.3(单调函数的极限) 设 $f(x)$ 是一个广义增函数,若在 a 的某个左邻域内,函数 $f(x)$ 有上界,则当 $x \rightarrow a^-$ 时, $f(x)$ 以其上确界为极限;若 $f(x)$ 在 a 的某个左邻域内无上界,对 $x \in (a - \delta, a)$ 有 $f(x) \leq A$;而则它以 $+\infty$ 为极限.对于广义减函数,可得类似的结论.

证 设广义增函数 $f(x)$ 在 a 的左邻域 $(a - \delta, a)$ 内有上界,则由定理 2.2.2,必有上确界 A . 按上确界定义,对任意 $\epsilon > 0$,必存在 $x' < a$,使得 $f(x') > A - \epsilon$.

再由 $f(x)$ 的单增性,当 $x > x'$ 时,有 $f(x) \geq f(x') > A - \epsilon$. 于是对这些 x ,有 $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$,即

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

此时,取 $\delta = a - x'$,便知 $f(x)$ 以上确界 A 为极限.

若 $f(x)$ 无上界,则不论 $M > 0$ 如何大,必存在 x' ,使得 $f(x') > M$;而当 $x > x'$ 时,更有 $f(x) > M$. 于是,类似上面的推理,可得 $f(x)$ 以 $+\infty$ 为极限.

在定理 2.2.3 中, a 也可取 $\pm\infty$.

2.2.4 两个重要的极限

1. 求证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

证 按定义 2.2.2,我们要证明:对于任给的 $\epsilon > 0$,必存在 $\delta > 0$,使得当 $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ 时,有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \epsilon.$$

不妨设 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. 我们先证明一个不等式: 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|, \quad (2.2.11)$$

一旦证明了此不等式成立, 则只要取 $\delta = \epsilon$ 就可得到要证的结果. 为此, 分为两种情况考虑.

(1) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则在单位圆内, 对于锐角 x , 有 (见图 2.2.4)

$\triangle AOB$ 的面积 $<$ 扇形 AOB 的面积 $<$ $\triangle AOC$ 的面积.

(2.2.12)

此处, AC 为圆在 A 点的切线, 不等式 (2.2.12) 可改写为

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

或

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

由此得

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < x.$$

从而得到

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}),$$

故 $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|$ 对 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 成立.

(2) 若 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, 只须令 $x = -t$, 即得 (2.2.11).

综上所述, 本例的结论成立.

2. 试证: 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时存在有限极限, 记为 e . 亦即要证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (2.2.13)$$

证 第一步: 证明数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 存在有限极限. 为此按定理 2.2.3, 只要证明 x_n 是一个有上界的单调增数列.

事实上, 由二项式定理, 我们有

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

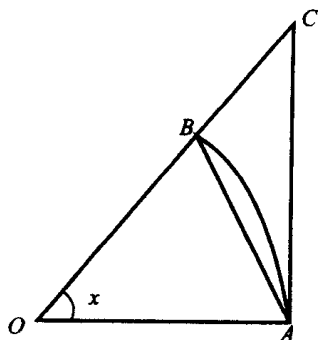


图 2.2.4

$$\begin{aligned}
&= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \cdots + \\
&\quad \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \\
&\quad \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \\
&\quad \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\
&\quad \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

比较两式, 知 x_{n+1} 比 x_n 增加了一个正项, 且相应的每一括号中形如 $1 - \frac{k}{n}$ 的因子都换为更大的 $1 - \frac{k}{n+1}$. 于是必定有

$$x_{n+1} > x_n.$$

这表明 $\{x_n\}$ 是单调增数列. 又因 x_n 中括号内的因子均小于 1, 故

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 3.$$

从而, $\{x_n\}$ 是有上界的. 于是, 由定理 2.2.3, 数列 $\{x_n\}$ 存在有限极限. 记此极限为 e , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (2.2.14)$$

第二步: 为证 (2.2.13), 首先考虑 $x \rightarrow +\infty$ 情形. 我们来证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (2.2.15)$$

设 $\{x_k\}$ 是趋于 $+\infty$ 的任一数列, 则必存在递增的正整数的子数列 $\{n_k\}$, 使得 $n_k \leq x_k < n_k + 1$. 故有

$$\frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k},$$

从而

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1},$$

或

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right). \quad (2.2.16)$$

由(2.2.14), 知两个子数列的极限存在且相等

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}.$$

故对(2.2.16)式取极限, 得

$$\lim_{x_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e.$$

由 $\{x_k\}$ 的任意性知(2.2.15)成立.

令 $x_k = -y_k$, 并采用类似的推理, 可得

$$\lim_{y_k \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y_k}\right)^{y_k} = e.$$

故类似于(2.2.15), 我们有

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e. \quad (2.2.17)$$

最后, 就可从(2.2.15)与(2.2.17)推出(2.2.13)式.

双曲函数

(2.2.13)式中的极限 e 就是众所周知的自然对数“ $\ln$ ”的底, $\ln x = \log_e x$. 由此, 还可定义一类常用的初等函数, 称为双曲函数

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

例 7 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right).$

解 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}},$$

又因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

例 8 设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n \in \mathbb{N}$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 首先我们用归纳法证明 $\{x_n\}$ 为单调增数列.

当 $n=1$ 时, $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2$, 结论显然成立.

设 $n=k$ 时, $x_k < x_{k+1}$ 成立, 则当 $n=k+1$ 时, 有

$$x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+x_{k+1}} = x_{k+2}.$$

因此当 $n=k+1$ 时结论 $x_{k+1} < x_{k+2}$ 也成立. 这就证明了 $\{x_n\}$ 为单调增数列.

下面证明 $\{x_n\}$ 是有界的.

$x_n > 0$ 是显然的. 利用归纳法可证明 $x_n < \sqrt{2} + 1$. 事实上, 当 $n=1$ 时, $x_1 < \sqrt{2} + 1$ 显然成立. 设 $x_k < \sqrt{2} + 1$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+\sqrt{2}+1} < \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1,$$

故 $\{x_n\}$ 有界.

由定理 2.2.3 知道, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记为 A . 由于 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, 则 $x_{n+1}^2 = 2+x_n$. 在此式两边取极限, 得 $A^2 = 2+A$. 解得 $A=2$, 或 $A=-1$.

但因为 $x_n > 0$, 故 $A \geq 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

例 9 试证

$$\lim_{a \rightarrow 0} (1+a)^{1/a} = e. \quad (2.2.18)$$

解 令 $x = \frac{1}{a}$, 由 (2.2.13) 式便得 (2.1.18).

2.2.5 无穷小量、无穷大量

本小节总假设 $x \rightarrow a$, a 为有限数、 $+\infty$ 、 $-\infty$, 或 ∞ ; 用 α 、 β 、 γ 、 $\cdots$ 表示 x 的函数, x 当然也可以取自然数.

考虑极限的两种重要情形, 即

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \gamma = \infty,$$

分别称 α 、 γ 为无穷小量与无穷大量.

定义 2.2.3 (无穷小量比较) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \beta = 0$,

(i) 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 为 β 的高阶无穷小, 或称 β 为 α 的低阶无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$.

(ii) 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = c \neq 0$, 则称 α 与 β 为同阶无穷小; 当 $c = 1$ 时, 称它们为等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$.

(iii) 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta^k} = c \neq 0, k > 0$, 则称 α 为关于 β 的 k 阶无穷小.

(iv) 若 $\frac{\alpha}{\beta}$ 在极限过程中保持有界, 即 $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \leq M$, 则记为 $\alpha = O(\beta)$.

对于两个无穷大量, 可以作类似的比较, 我们不再详细说明.

在求极限过程中可以用无穷小量作代换:

定理 2.2.4 (无穷小的代换) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha = 0, \lim_{x \rightarrow a} \beta = 0$, 且 $\alpha \sim \bar{\alpha}; \beta \sim \bar{\beta}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

请读者自行证明这个定理.

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解 由

$$\tan x - \sin x = \frac{1}{\cos x} \sin x - \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \sin x \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \sin x \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x},$$

则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \frac{1}{\cos x} \sin x \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} \left\{ x \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right\} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.2.6 函数的连续性

在研究函数极限时, 我们曾假设 $x \rightarrow a$, 但 $x \neq a$, 并且 a 也不一定属于函数 $f(x)$ 的定义域. 然而这种被排除的情形恰是本小节要引入的重要概念——函数的连续性.

定义 2.2.4 (连续函数) 若函数 $f(x)$ 满足:

(i) 对于 $a \in \mathbf{R}$, $f(a)$ 取有限值, 亦即, $a \in D_f$,

(ii) 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 存在为有限数,

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$,

则称函数在点 a 是连续的.

若 $y = f(x)$ 在定义域的每一点 $x \in D_f$ 都连续, 则称函数 $y = f(x)$ 在 D_f 上连续, 或称 $f(x)$ 为 D_f 上的连续函数, 并称 $y = f(x)$ 所对应的曲线为连续曲线.

连续性, 同样可用 $\varepsilon - \delta$ 语言表示, 请读者自行完成.

注 类似地,可定义函数的左连续及右连续.

左连续:任给 $\epsilon > 0$,必存在 $\delta > 0$,使得 $0 \leq a - x < \delta$ 时,就有 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$;

右连续:任给 $\epsilon > 0$,必存在 $\delta > 0$,使得 $0 \leq x - a < \delta$ 时,就有 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

并分别记为:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a-0),$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a+0).$$

连续函数运算规则与连续函数的判定准则

1. 连续函数的四则运算

连续函数的和、差、积、商(分母 $\neq 0$)是连续的.这可由公式(2.2.8) ~ (2.2.10)得到.

2. 连续函数的复合

引理 设函数 $y = f(u)$ 在点 $u = b$ 连续,又函数 $u = g(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$,这里 a 为有限数或 $\pm \infty$,则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(b).$$

证 我们仅对 a 为有限情形证明.

由于 $f(u)$ 在点 b 连续,故 $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = f(b)$. 因此,对任给的 $\epsilon > 0$,必存在 $\delta > 0$,使得 $|u - b| < \delta$ 时,有 $|f(u) - f(b)| < \epsilon$. 对于上述 $\delta > 0$,由于 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$,因此存在 $\eta > 0$,使得 $0 < |x - a| < \eta$ 时,有 $|g(x) - b| < \delta$.

令 $u = g(x)$,则当 $0 < |x - a| < \eta$ 时,有 $|f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$. 这就证明了

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b).$$

定理 2.2.5(复合函数的连续性) 连续函数的复合函数仍然是连续的.亦即,若 $y = f(u)$ 在 $u \in D_f$ 连续, $u = g(x)$ 在 $x \in D_g$ 连续,且 $R_g \subset D_f$,则复合函数 $y = f(g(x))$ 在 $x \in D_g$ 连续.

3. 连续函数的反函数

定理 2.2.6(反函数的连续性) 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $I \subset D_f$ 上单调且连续,其值域为 $I_1 = f(I)$. 则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 I_1 上也是单调且连续的.

证 任取 $y_0 = f(x_0) \in I_1$,由 $f^{-1}(y)$ 的单调性(定理 2.2.1),按定理 2.2.3, $f^{-1}(y_0 - 0)$ 及 $f^{-1}(y_0 + 0)$ 存在. 我们只要证明

$$f^{-1}(y_0 - 0) = f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + 0).$$

设 $x_1 = f^{-1}(y_0 - 0)$, $x_2 = f^{-1}(y_0 + 0)$,即只要证明 $x_1 = x_2 = x_0$.

由 $f(x)$ 的连续性,

$$y_0 = \lim_{y \rightarrow y_0^-} y = \lim_{y \rightarrow y_0^-} f[f^{-1}(y)] = \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1),$$

$$y_0 = \lim_{y \rightarrow y_0^+} y = \lim_{x \rightarrow x_2} f(x) = f(x_2).$$

再由单调性,

$$x_1 = f^{-1}(y_0) = x_0,$$

$$x_2 = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

定理得证.

4. 基本初等函数的连续性

六种基本初等函数在其定义域上都是连续的. 证明思路如下: 只须证明正弦函数 $y = \sin x$ 的连续性与指数函数 $y = a^x$ 的连续性, 便可得到其余四种基本初等函数的连续性了 (这是为什么呢? 请读者自己回答, 并给出证明).

为此, 我们证明 $y = \sin x$ 与 $y = a^x$ 的连续性. 这只需分别由

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x-x_0| \end{aligned}$$

与

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{z \rightarrow 0} a^z = a^{x_0}$$

得到. 上面推导中最后的等式用到的关系式 $\lim_{z \rightarrow 0} a^z = 1$ 是用 $\epsilon - \delta$ 语言证明的.

例 11 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b$, $a > 0$, 求证: $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)} = a^b$.

证 因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x) \ln u(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \exp\{v(x) \ln u(x)\},$$

这里 $\exp x = e^x$. 由指数函数与对数函数的连续性以及连续函数的复合性质可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)} &= \exp\{\lim_{x \rightarrow x_0} [v(x) \ln u(x)]\} \\ &= \exp\{\lim_{x \rightarrow x_0} [v(x)] \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} [\ln u(x)]\} \\ &= \exp\{b \cdot [\ln \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)]\} = \exp\{b \ln a\} = a^b. \end{aligned}$$

5. 有界闭区间上连续函数的重要性质

首先叙述有界闭区间的两个特别有用的性质.

性质 1 (波尔查诺 - 魏尔斯特拉斯, B. Bolzano - K. Weierstrass) 有界闭区间 $[a, b]$ 中任一无穷数列 $\{x_n\}$, 必存在具有有限极限的子数列 $\{x_{n_k}\}$.

常称这种具有有限极限的子数列为“收敛子序列”, 性质 1 实质上用数列的

形式刻画了有界闭区间的某种紧致性. 在近代数学科学和其他自然科学领域中, 一个集合或一个空间的紧致性是非常重要的.

此性质的证明在许多参考书上都可找到, 请读者试试看.

性质 2(连通性) 有界闭区间具有连通性, 亦即, 其中任意两点的连线都在此有界闭区间中.

这个性质非常直观且易于理解.

利用有界闭区间的上述性质, 我们可以证明连续函数有如下重要性质.

定理 2.2.7(中间值定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. 则对 A 与 B 之间的任一个数 C , 存在点 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) = C$.

注 1 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 是指 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 在 $x = a$ 右连续, 在 $x = b$ 左连续.

证 不妨设 $A < B$, 任取 $C \in [A, B]$.

作辅助函数 $g(x) = f(x) - C$, 则 $g(x)$ 连续, 且 $g(a) < 0$, $g(b) > 0$. 只须证明, 存在点 c , $a \leq c \leq b$, 使得 $g(c) = 0$, 从而 $f(c) = C$.

二等分 $[a, b]$, 得区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, 如果 $g\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 取 $c = \frac{a+b}{2}$, 则定理得证. 如不然, 由区间的连通性, 这两个区间中必有一个使 $g(x)$ 在其两个端点异号, 设为 $[a_1, b_1]$, 且有 $g(a_1) < 0$, $g(b_1) > 0$. 如此继续下去, 若在某一次等分区间时, 在等分点上使 $g(x)$ 取 0, 定理便得以证明. 否则, 得到一系列有包含关系的区间

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

并且

$$g(a_n) < 0, \quad g(b_n) > 0,$$

与

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

于是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $b_n - a_n \rightarrow 0$. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

记此极限值为 c .

由 $g(x)$ 的连续性, 知

$$g(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \leq 0,$$

$$g(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) \geq 0.$$

从而得到 $g(c) = 0$.

注 2 本定理有很直观的几何意义:若连续函数 $g(x)$ 所对应的曲线从 x 轴转到其另一边,则此曲线必与 x 轴相交.

定理 2.2.8(有界性定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则它必在 $[a, b]$ 上有界,即必存在有限数 $M > 0$,使对任意的 $x \in [a, b]$,有 $|f(x)| \leq M$.

证 用反证法.若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界,则对任一自然数 n ,存在 $x_n \in [a, b]$,使得 $|f(x_n)| \geq n$.

由性质 1,从数列 $\{x_n\}$ 中可选出一个子数列 $\{x_{n_k}\}$,使 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$.再由连续性,得 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$.

这与 $|f(x_n)| \geq n$ 矛盾.定理得证.

由此定理与确界的存在性定理 2.2.2,知连续函数在闭区间上必存在上确界与下确界.我们还有如下更强的结果.

定理 2.2.9(最大值与最小值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则它必在 $[a, b]$ 上取得其最大值与最小值.

证 也用反证法.设 M 是 $f(x)$ 的最大值,且对任意的 $x \in [a, b]$ 有 $f(x) < M$.作

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

它也是 $[a, b]$ 上的连续函数.由定理 2.2.8,存在正数 $L > 0$,使得 $\varphi(x) \leq L$,从而 $f(x) \leq M - \frac{1}{L}$.这表明 $f(x)$ 有一个小于 M 的上界 $M - \frac{1}{L}$,与 M 是最小上界矛盾.故必有 $x_0 \in [a, b]$,使 $f(x_0) = M$.

对于最小值的结论,可类似证明.

6. 一致连续性

用 $\epsilon - \delta$ 语言来刻画“函数 $f(x)$ 在定义域 D_f 上每一点 x' 都连续”:对于每一个 $x' \in D_f$,任给 $\epsilon > 0$,必存在 $\delta = \delta(\epsilon, x') > 0$,使当 $|x - x'| < \delta$ 时,有

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

应当注意的是,这里 δ 非但与 ϵ 的取法有关,而且与连续点 x' 所在的位置有关.所以记为 $\delta = \delta(\epsilon, x') > 0$.另一方面,由函数连续性的 $\epsilon - \delta$ 定义不难看出,函数在一点的连续性仅与该连续点邻近的函数值有关,因此它是函数的一种局部属性.但是,如果我们考虑函数定义域 $D_f = [a, b]$ 为闭区间,与点的局部性质联在一起,就会在整体上显示出一种新的特性,例如 $\delta = \delta(\epsilon, x') > 0$ 就会与 x' 无关.这就是一致连续的概念.

定义 2.2.5(一致连续性) 称函数 $f(x)$ 在 D_f 为一致连续的,如果对于任意的 $\epsilon > 0$,必存在仅与 ϵ 有关的 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$,使对任何 $x, x' \in A$,只要 $|x -$

$|x'| < \delta$, 就有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

闭区间的连续函数有如下重要性质.

定理 2.2.10 (一致连续性) 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必定是一致连续的.

这里我们强调两点: ① 一致连续性所刻画的是连续函数的一种整体性质, 描述了函数在整个定义域上的连续性是均匀的. ② 定理中“闭区间”的假设可以推广到欧氏空间中的“紧致集”上, 即, 欧氏空间中紧致集上的连续函数一定是一致连续的.

例 12 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B$, 其中 $A, B \in \mathbb{R}$, 求证函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界.

证 作函数

$$F(x) = \begin{cases} A, & x = a, \\ f(x), & a < x < b, \\ B, & x = b. \end{cases}$$

则由连续函数的定义可知, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 因此据定理 2.2.5, 存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x \in [a, b]$, 有

$$|F(x)| \leq M.$$

从而也有 $|f(x)| \leq M$.

习 题

1. 用数列的极限定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

2. 用数列的极限定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, (|q| < 1)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n} + 1 \right) = 1$$

3. 设数列 $\{x_n\}$ 存在有限极限, 证明 $\{x_n\}$ 为有界数列.

4. 证明若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

5. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 6^n}{(-3)^{n+1} + 6^{n+1}}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right]$$

6. 用函数极限定义证明: $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

7. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 又设 y_n ($n = 1, 2, \cdots$) 为任意数列, 问能否断定 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0$? 举例说

明.

8. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^3(3x+2)^4}{(4x+1)^7}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$

(7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$

(8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \quad m, n \in \mathbf{N}$

(9) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

(10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

9. 已知 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x + 1}$ 为有限数 l , 试求 a, l .10. 从条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 求常数 a, b .11. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \frac{1}{(n+3)^3} \right]$.12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x}$.

13. 求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, \quad m, n \in \mathbf{N}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan x}{1 - \cos x}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos^2 x}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{(1 - \cos x) \sin^3 x}$

14. 设 $a > 0, x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.15. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n, x > 0$.

16. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$

17. 研究下列函数的连续性:

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(2) $f(x) = [x]$

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ A, & x = 2 \end{cases}$

18. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ x + b, & x \geq 0, \end{cases}$ 当如何选取 b , 使 $f(x)$ 为连续函数?

19. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^b}{x - b}, \quad a > 0 \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\lg \cos bx}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2 \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

20. 试证: 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1}$ 在 $(0, 1)$ 内一致有界.

21. 试证: 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 而 x_1, x_2, x_3 为 (a, b) 内不同的三点, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{3}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]$.

22. 讨论函数 $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 内的有界性.

§ 2.3 导数

2.3.1 函数的导数概念

回顾 § 2.1 开始的例子. 假设作直线运动的质点 m 从原点 O 出发, 并从时刻 $t=0$ 计时. 当 m 运动到点 A 时, 所需时间为 t , 所走距离记为 $s = s(t)$. 由中学物理知识知道, 当 m 作匀速直线运动时, $s = vt$, 这里 v 是其运动速度. 然而, 对稍微复杂一点的变速运动, 如何由 $s = s(t)$ 求得其速度呢? 现在就来解决这个问题.

既然是变速运动, 各个时刻的速度也应当是时间 t 的函数, 记为 $v = v(t)$, 它是质点在时刻 t 的速度, 称为质点在时刻 t 的瞬时速度. 我们来求质点在某时刻 t_0 的瞬时速度 $v_0 \equiv v(t_0)$. 在中学物理课程中, 是用平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{(t_0 + \Delta t) - t_0} \quad (2.3.1)$$

近似地代替瞬时速度 v_0 , 其中 $\Delta t = (t_0 + \Delta t) - t_0 > 0$ 或 < 0 表示由 t_0 ‘起始’的时间间隔, Δs 表示包含 s_0 的一个距离间隔 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, 而 $\bar{v}$ 实际上是点 A 在时间间隔 Δt 中的一个平均速度, $\bar{v}$ 的值与时间间隔 Δt 有关. 显然, Δt 愈小, 这个平均速度的精确性愈高. 但是, Δt 不能等于 0, 否则, (2.3.1) 式将无意义. 这样, 我们希望看到当 Δt 愈来愈小的时候, $\bar{v}$ 的变化趋势是什么? 自然地, 如果极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{(t_0 + \Delta t) - t_0} \quad (2.3.2)$$

存在,则此极限值恰巧就是 t_0 时刻的瞬时速度.

再看曲线的切线问题.在中学数学课程中已学过求圆的切线的方法.但对于一般曲线,如何定义又如何求出其上任一点的切线呢?

设曲线 Γ 的方程为 $y = f(x)$, Γ 上的点 P 的坐标为 $(x_0, f(x_0))$.取 Γ 上任意点 $P'(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$,则割线 PP' 的斜率为

$$\bar{k}(\Delta x) = \frac{P'Q}{PQ} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2.3.3)$$

显然,曲线在 P 点之切线是当 P' 沿曲线无限接近于 P 点时,割线 PP' 的极限位置(见图 2.3.1).于是,此切线的斜率应为

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{k}(\Delta x). \quad (2.3.4)$$

当人们知道了变量之间的变化规律后,经常还需要进一步了解其变化的快慢程度,也就是变化率问题.式(2.3.1)、(2.3.3)中的比值正好分别是函数 $s(t)$ 在时间间隔 Δt 内与 $f(x)$ 在间隔 Δx 内变化的平均快慢程度,式(2.3.2)、(2.3.4)中的极限就是所需要的变化率(瞬时的变化快慢).求变化率问题,不仅在求运动质点的瞬时速度问题、求函数图像的切线问题中遇到,在气象预报中的台风的速度、天文学中星体的运动速度、化学或医学中液体或血液沉降速度,人口以及生物的生长繁殖快慢、股市行情变化情况,等等,都与求函数的变化率有密切关系.

另一方面,由(2.3.2)式、(2.3.4)式知,求切线斜率与求运动质点速度,实质上是同样的极限问题.其实,求函数的变化率问题,均可归结为如上形式的极限问题,我们称这极限为函数的导数.现在给出导数的严格数学定义.

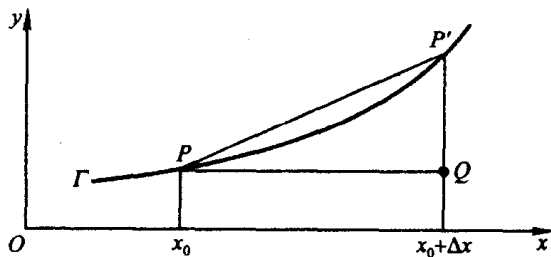


图 2.3.1

定义 2.3.1(导数) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为区间 (a, b) , $x_0 \in (a, b)$, $y_0 = f(x_0)$.任给 x_0 一个改变量 $\Delta x (>0$ 或 $<0)$,使得 $x_0 + \Delta x \in (a, b)$.相应地,记 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,并称 Δy 为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的改变量,也

分别称 Δx 与 Δy 为自变量与函数的增量. 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2.3.5)$$

存在且为有限数, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导, 称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 的导数(或微商), 记为 $f'(x_0)$, 或 $\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}$.

若 $y = f(x)$ 在定义域 (a, b) 的每一点 $x \in (a, b)$ 都可导, 则称它在 (a, b) 上可导, 并称 $y = f'(x)$ 为 $y = f(x)$ 的导函数, 也记为 $\frac{df}{dx}$.

导数, 是高等数学教程中极为重要的角色, 它在以后的章节中起着不可替代的作用. 这里首先证明它与连续性的关系.

定理 2.3.1(导数与连续的关系) 若 $y = f(x)$ 的定义域为 (a, b) , $f(x)$ 在点 $x_0 \in (a, b)$ 可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 连续.

证 由于 $f(x)$ 在点 $x_0 \in (a, b)$ 可导, 故对于任给的 $\epsilon_1 > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使当 $0 < |\Delta x| < \delta_1$ 时, 有

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right| < \epsilon_1.$$

因 $f'(x_0)$ 为有限数, 所以可取一个常数 M_0 , 满足 $|f'(x_0)| + \epsilon_1 < M_0$, 使

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < |\Delta x| (|f'(x_0)| + \epsilon_1) < M_0 |\Delta x|. \quad (2.3.6)$$

为证 $f(x)$ 在 x_0 连续, 只要证: 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |\Delta x| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \epsilon. \quad (2.3.7)$$

由(2.3.6), 也只要证

$$|\Delta x| M_0 < \epsilon. \quad (2.3.8)$$

取 $\delta = \min \left\{ \frac{\epsilon}{M_0}, \delta_1 \right\}$, 则对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |\Delta x| < \delta$ 时, (2.3.7) 成立. 定理得证.

注 1 由此, 我们可写出一个增量公式: 若函数 $f(x)$ 在其定义域 (a, b) 中可导, 则

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x), \quad (2.3.9)$$

其中 $o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小.

注 2 类似地, 可定义左导数、右导数(单边导数): 在函数 $f(x)$ 的定义域为 (a, b) 的假设下, 对于 $x_0 \in (a, b)$, 分别称极限(若它们是有限数)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0); \quad (2.3.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \quad (2.3.11)$$

为 $f(x)$ 在 x_0 的左导数与右导数. 左、右导数的几何意义应理解为通过 x_0 的曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 的左边与右边的切线, 当此两条切线重合时, 就是曲线在 x_0 点的切线. 反之, 若 $f(x)$ 在 x_0 有有限导数, 则它在 x_0 有左、右导数, 且其值与 $f'(x_0)$ 相等, 而曲线在 x_0 有切线, 也有左、右切线.

显然, 在区间 (a, b) 的两个端点 a 与 b , 只能分别考虑右导数与左导数. 我们约定, “函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导”, 就是指: 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 的每一点有导数, 而在 a 点有右导数、在 b 点有左导数.

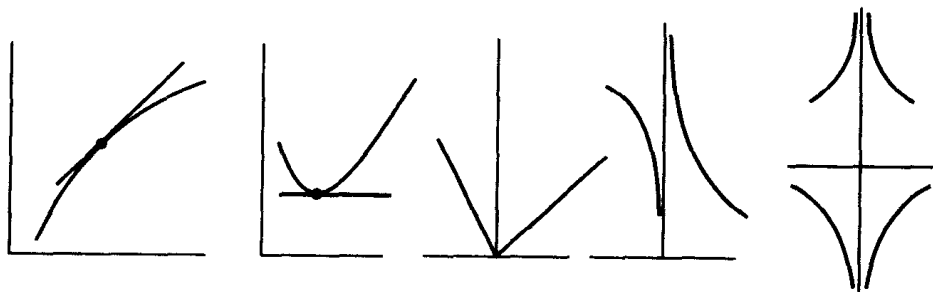
注 3 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有导函数 $f'(x)$, 则我们可以考虑 $x_0 \in (a, b)$ 处的导函数的左、右极限

$$f'(x_0 - 0) \quad \text{与} \quad f'(x_0 + 0). \quad (2.3.12)$$

请读者务必区分 (2.3.10)、(2.3.11) 与 (2.3.12) 的异同.

注 4 如果 (2.3.5) 式中的极限是 0, 则曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 的切线平行于 Ox 轴. 如果 (2.3.5) 式中的极限是确定符号的无穷, $+\infty$ 或 $-\infty$, 则我们理解为: 曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 有平行于 Oy 轴的切线.

注 5 由于 $\Delta x \rightarrow 0$, (2.3.5) 中的 Δx 一般都取值很小. 这表示函数的可导性是一种“局部”性质, 即函数 $f(x)$ 在一点的可导性如何, 只与其在点 x_0 邻近的性质有关. (2.3.5) 中极限后的分数的分子和分母都分别趋近于 0, 呈 $\frac{0}{0}$ 不定式, 这是一种不定型, 它的值将随所考虑的函数不同与点 x_0 的不同而不同 (见图 2.3.2).



$f'(x) \neq 0$ 为有限数 $f'(x) = 0$ 单方有限导数 $f'(x) = \infty$ $f'(x) = \pm \infty$

图 2.3.2

定义 2.3.2 (高阶导数) 如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 的导函数 $f'(x)$ 也有导函数, 则称之为 $f(x)$ 的二阶导数, 记为

$$f''(x) = (f')'(x), \text{ 或 } \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right).$$

用归纳方法可定义 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$ 的导数, 如三阶导数 $f'''(x)$, 或 $\frac{d^3 f}{dx^3}, \dots, n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^n f}{dx^n}$ 等.

高阶导数的应用是很广泛的. 例如运动质点的二阶导数表示其加速度, 曲线的二阶导数与曲线的弯曲程度有关, 等等.

2.3.2 几种初等函数的导数

本小节利用导数的定义求几种初等函数的导数.

例 1 求常函数 $y = C$ (C 是常数) 的导数.

解 对常函数 $y = C$, 不论 x 取什么值, y 的值总是等于 C , 故 $\Delta y = 0$. 从而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以, 常函数的导数等于 0.

例 2 求函数 $y = x^n$ (n 是自然数) 的导函数.

解 函数 $y = x^n$ 的定义域为 $I = (-\infty, +\infty)$, 由

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n \\ &= nx^{n-1}\Delta x + C_2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \end{aligned}$$

得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{ nx^{n-1}\Delta x + C_2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \} / \Delta x = nx^{n-1}.$$

因此, $(x^n)' = nx^{n-1}$. 特别, 当 $n = 1$ 时, x 的导数等于 1.

例 3 求函数 $y = \sin x$ 的导函数.

解 函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $I = (-\infty, +\infty)$, 由

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

据

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} \right] = \cos x.$$

因此, $y' = (\sin x)' = \cos x$.

例 4 求函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导函数.

解 函数 $y = \log_a x$ 的定义域为 $I = (0, +\infty)$, 由

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \right\} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

由本章 §2 中 e 的定义知

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \log_a e,$$

因此, 由

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e,$$

我们得到 $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$. 特别地, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

例 5 试证函数

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在 $x=0$ 点连续, 但不可导.

证 对于 $x \neq 0$ 时, 由极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

故函数在 $x=0$ 连续. 现证明函数在 $x=0$ 不可导. 事实上, 由

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

但当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时上式不存在极限, 从而函数在 $x=0$ 点不可导.

§2.4 求导法则

在 §2.3 中的例是利用定义求导数, 本小节给出导数的运算法则.

2.4.1 导数的四则运算

定理 2.4.1 (导数的四则运算公式) 设 $f(x), g(x)$ 是在区间 (a, b) 上的可导函数, 则在 (a, b) 上成立

$$(i) (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \quad \alpha, \beta \text{ 为常数},$$

$$(ii) (fg)' = f'g + fg',$$

$$(iii) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

证 我们只证明(ii), 其余情形类似可得. 据

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \\ &= [f(x+\Delta x) - f(x)]g(x+\Delta x) + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)], \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right\} g(x+\Delta x) + \\ &\quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \left\{ \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= f'g + fg' \end{aligned}$$

定理 2.4.2 (高阶导数的莱布尼茨(G. W. Leibniz)公式) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在共同的定义区间 (a, b) 有直到 n 阶的导函数, 则乘积 $f(x)g(x)$ 有 n 阶导函数, 并且有莱布尼茨公式

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} \\ &= f^{(n)} g + n f^{(n-1)} g' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f^{(n-2)} g'' + \cdots + \\ &\quad \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} f^{(n-k)} g^{(k)} + \cdots + fg^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

例 1 求函数 $y = \tan x$ 的导函数.

解 由定理 2.3.1(iii) 得

$$\begin{aligned} y' &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \end{aligned}$$

于是, 我们有 $y' = (\tan x)' = \sec^2 x$.

2.4.2 反函数的求导法则

定理 2.4.3 (反函数求导公式) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 中连续、单调并可导, 且 $f'(x) \neq 0, x \in (a, b)$, 则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y \in f((a, b))$ 可导, 且

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}. \quad (2.4.2)$$

证 由反函数的存在定理 2.2.6, 知反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $f((a, b))$ 中连

续,故取 $\Delta y \neq 0, \Delta y \rightarrow 0$, 相应地, 有 $\Delta x \neq 0, \Delta x \rightarrow 0$. 于是

$$\begin{aligned}(f^{-1})' &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} \\&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \\&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'}.\end{aligned}$$

因此反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的求导公式(2.4.2)成立.

注 反函数的导数公式有清楚的几何意义: 导数 y'_x 是函数 $y = f(x)$ 图像上点 x 处的切线的斜率, 即切线与 Ox 轴的夹角 α 的正切. 而反函数 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 有相同的图像, 只是其自变量是 y . 因此导数 x'_y 就是同一条直线, 只是它与 Oy 轴的夹角 β 的正切, 而 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 见图 2.4.1(a).

通常习惯把反函数 $x = f^{-1}(y)$ 记为 $y = f^{-1}(x)$, 其图像如图 2.4.1(b).

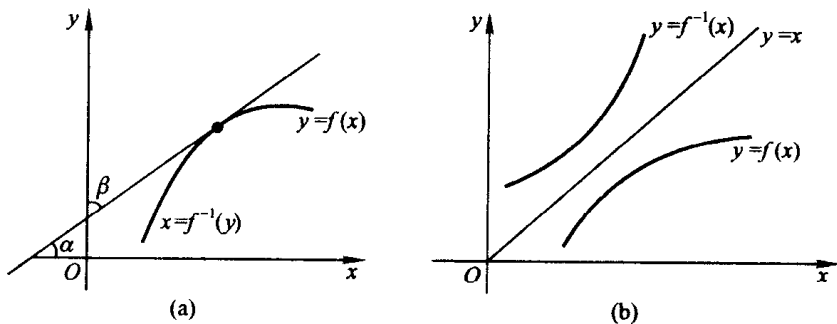


图 2.4.1

例 2 求指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 0$) 的导函数.

解 指数函数 $y = a^x$ 是对数函数 $y = \log_a x$ 的反函数, 我们把对数函数写为 $x = \log_a y = f^{-1}(y)$, 由公式(2.4.2)与 § 2.3.2 例 4 得

$$(a^x)' = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a,$$

再把右边的 y 用 a^x 代入, 最后得

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

特别地, $(e^x)' = e^x$.

例 3 求反三角函数 $y = \arcsin x$, $-1 < x < 1$, 的导函数.

解 $y = \arcsin x$ 在 $(-1, 1)$ 内满足定理 2.4.3 的连续、单调、可导条件, 其

反函数为 $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. 于是由公式 (2.4.2) 得 $(\sin y)' = \frac{1}{(\arcsin x)'}$, 从而

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y},$$

由于 $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, 故 $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, 我们有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2.4.3 复合函数的求导法则

定理 2.4.4 (复合函数导数公式) 设函数 $y = f(u): (A, B) \rightarrow R_f$ 在 (A, B) 可导, $u = g(x): (a, b) \rightarrow R_g$ 在 (a, b) 可导. 若 $R_g \subset (A, B)$, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 在 (a, b) 可导, 且

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad y'_x = y'_u u'_x. \quad (2.4.3)$$

证 我们用无穷小量表示方法, 对于 $\Delta u \neq 0$, 得

$$\Delta y = f'(u) \Delta u + \alpha \Delta u, \quad (2.4.4)$$

其中 $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0$, 同时对于 $\Delta x \neq 0$, 有

$$\Delta u = g'(x) \Delta x + \beta \Delta x, \quad (2.4.5)$$

并且 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = 0$, 且 $\Delta u \rightarrow 0$. 于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

式 (2.4.5) 给出 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = g'(x)$, 从而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) g'(x) = f'(g(x)) g'(x). \quad (2.4.6)$$

此法则也称为复合函数求导的链式法则, 可用于多个函数的复合.

例 4 求函数 $y = (2x^2 + 1)^{100}$ 的导函数.

解 令 $y = u^{100}$, $u = 2x^2 + 1$, 则由

$$y_u = 100u^{99}, \quad u_x = 4x,$$

依据公式 (2.4.6) 得

$$y'_x = y'_u u'_x = 100u^{99} \cdot 4x = 400x(2x^2 + 1)^{99}.$$

例 5 求幂函数 $y = x^\mu$, $x > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$, 的导函数.

解 由 $y = x^\mu = e^{\mu \ln x}$, 令 $y = e^u$, $u = \mu \ln x$, 按公式 (2.4.6) 得

$$y' = (x^\mu)' = (e^{\mu \ln x})' = (e^\mu)' \cdot (\mu \ln x)' = e^\mu \cdot \frac{\mu}{x} = x^\mu \cdot \frac{\mu}{x},$$

所以有 $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$.

例 6 求函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的导函数.

解 令 $y = \ln u, u = x + v, v = \sqrt{1+w}, w = x^2$. 由

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u u'_x = y'_u (1 + v'_x) = y'_u (1 + v'_w w'_x) \\ &= \frac{1}{u} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+w}} 2x \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

2.4.4 对数求导法则

在例 5 中,我们将幂函数 $y = x^\mu$ 写为 $y = e^{\mu \ln x}$,此法可归纳为更一般的“对数求导法则”.

设 $y = (u(x))^{v(x)} > 0$, 对其求对数,得

$$\ln y = v(x) \ln u(x),$$

再对上式两边求导数,得

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x).$$

从而

$$y' = u(x)^{v(x)} \left\{ v'(x) \ln u(x) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x) \right\}. \quad (2.4.7)$$

例 7 求函数 $y = x^{\sin x}$ 的导函数.

解 由公式(2.4.7),得

$$y'_x = x^{\sin x} \left\{ \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right\}.$$

例 8 求函数 $y = \sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)}{x(x+1)}}$ 的导函数.

解 由

$$\ln y = \frac{1}{3} \{ \ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln x - \ln(x+1) \},$$

故

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y}{3} \left\{ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)}{x(x+1)}} \cdot \frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x-2)(x^2-1)}. \end{aligned}$$

2.4.5 隐函数求导法则

对于自变量 x 与因变量 y 的关系由函数式 $F(x, y) = 0$ 确定,但又得不到明

显关系 $y = f(x)$ 的情形,我们可用隐函数求导数的方法.

例 9 求由方程 $e^x + e^y - xy = 0$ 确定的函数 $y = f(x)$ 的导函数.

解 在方程 $e^x + e^y - xy = 0$ 中, $y = f(x)$. 利用复合函数求导法则,对方程两边求导,有

$$(e^x + e^y - xy)' = e^x + e^y y'_x - y - xy'_x = 0,$$

解出 y'_x 得

$$y'_x = -\frac{e^x - y}{e^y - x}.$$

2.4.6 参数式求导法则

当函数关系由参数式 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in J$, 给出时,我们假设 $\varphi'(t)$ 、 $\psi'(t)$ 存在,并且 $\varphi'(t) \neq 0$, y 将被确定为 x 的函数, $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$, 则有:

$$y'_x = (\psi(\varphi^{-1}(x)))' = \psi'(\varphi^{-1}(x))' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (2.4.8)$$

例 10 求由参数式 $\begin{cases} x = r(\theta)\cos \theta, \\ y = r(\theta)\sin \theta, \end{cases} \theta_0 < \theta < \theta_1$, 确定的函数 $y = f(x)$ 的导函数.

解 由公式(2.4.8)得

$$y'_x = \frac{r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta} = \frac{r'_\theta \tan \theta + r}{r'_\theta - r \tan \theta}.$$

2.4.7 导数基本公式表

(1) $(C)' = 0$, C 为常数

(2) $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$

(3) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(5) $(\sin x)' = \cos x$

(6) $(\cos x)' = -\sin x$

(7) $(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

(8) $(\cot x)' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(10) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(11) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(12) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(13) (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

习 题

1. 若质点作直线运动, $s = 3t^2 + 2t + 1$, 这里 t 为时间, s 为路程, 计算从 $t = 2$ 到 $t = 2 + \Delta t$ 之间的平均速度, 并求 $t = 2$ 的瞬时速度.

2. 根据导数的定义, 计算下列函数在点 x 处的导数:

$$(1) f(x) = \frac{1}{x+1} (x \neq -1)$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x+1} (x > -1)$$

3. 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点可导, 且 $f(0) = 0$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

4. 设 $y = \begin{cases} x^2, & x \geq x_0 \\ ax + b, & x < x_0 \end{cases}$ 试选择参数 a 与 b , 使得函数 y 在 x_0 点可导.

5. 求下列函数的导数:

$$(1) y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

$$(2) y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$(3) y = \frac{x^3 + 2x + x - 1}{x}$$

$$(4) y = \frac{x^3 - 2}{x + 1}$$

$$(5) y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$$

$$(6) y = |x| + |x - 1|$$

$$(7) y = x \ln x - x$$

$$(8) y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$(9) y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$(10) y = \ln \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$(11) y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(12) y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$(13) y = \arcsin(\sqrt{\sin x})$$

$$(14) y = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$$

$$(15) y = \arctan \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} (0 \leq x < \pi)$$

$$(16) y = \arctan \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$$

$$(17) y = x^{\frac{1}{x}}$$

6. 设 $\begin{cases} x = t - \arctan t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$ 试求 $\frac{dy}{dx}$.

7. 试求由下列方程所定义的隐函数 $y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$) (2) $x^y = y'$

8. 设 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ 在点 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 处的切线, 试求由 L 与坐标轴所构成的三角形的面积.

9. 试求双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 图像上切线是水平的那些点.

10. 试证 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ x, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点存在任意阶导数, 并且 $f^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \dots$.

11. 设 $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$, 求 dy .

12. 设 $y = \sin ax \cdot \cos bx$, 求 dy .

13. 试求下列函数的二阶导数与 n 阶导数

(1) $y = \sin x$ (2) $y = e^{ax}$

(3) $y = \frac{1}{x}$ (4) $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

(5) $y = \ln(1+x)$ (6) $y = xe^x$

14. 设 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, 试求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

15. 设 (1) $y = e^{ax} \cos bx$; (2) $y = e^{ax} \sin bx$. 试求 y' 与 y'' .

16. 试求由 $2 \arctan \frac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2)$ 所定义的隐函数 $y(x)$ 的一阶导数与二阶导数.

17. 试求 $f(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x+4)$ 的导数, 说明 $f'(x) = 0$ 的实根的个数, 并指出各个根所在的区间.

18. 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

19. 设 $0 < a < b$, 试证 $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

§ 2.5 导数应用

本节主要给出微分学的三个重要定理, 求不定型极限的洛必达(L'hospital)法则, 函数的泰勒(Taylor)展开式, 并利用导数来研究函数的性质如函数的单调性、极值、凹凸、渐近线等, 以加深对函数性质的理解.

2.5.1 应用的依据——三个重要定理

在应用导数研究函数之前, 先给出应用的理论依据——关于导数的三个重要定理.

定理 2.5.1 (洛尔, M. Roll) 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 又设 $f(a) = f(b)$. 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上等于常数, 则其导数为 0, 因此 (a, b) 中任意一点都可被取为 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不等于常数, 由连续性知, $f(x)$ 最大值 M 与最小值 m 必能达到, 且不相等即 $M > m$. 由假设条件 $f(a) = f(b)$, 可设 $M > f(a)$. 于是, 必有一点 $\xi, a < \xi < b$, 使 $f(\xi) = M$. 现在我们证明: $f'(\xi) = 0$.

事实上, 由 $f(x) \leq f(\xi)$ 对每个 $x \in [a, b]$ 成立, 故

$$f'(\xi - 0) = \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

与

$$f'(\xi + 0) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

同时成立, 从而只有 $f'(\xi) = f'(\xi - 0) = f'(\xi + 0) = 0$. 定理得证.

定理 2.5.2 (拉格朗日, C. Lagrange) 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导. 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2.5.1)$$

证 引入一个辅助函数

$$g(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right\} \quad (a \leq x \leq b).$$

易见, $g(x)$ 满足定理 2.5.1 的条件, 故存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $g(\xi) = 0$, 也就是 (2.5.1) 式成立.

注 1 定理 2.5.2 的几何意义是: 对于满足定理条件的函数图像是平面上一条连续并且每一点都有切线的曲线. 在所有切线中, 必存在一条切线平行于联结曲线两端点 $(a, f(a))$ 与 $(b, f(b))$ 的弦 (图 2.5.1).

定理 2.5.2 的物理意义是: 如果满足定理条件的函数 $y = f(t)$ 表示运动质点在时间 t 的位置, 则 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 是此质点在 $[a, b]$ 中的平均速度. 因此拉格朗日 (Lagrange) 定理 (亦称微分中值定理) 的物理涵义是, 当质点 m 在时间间隔 $[a, b]$ 内运动时, 必存在一个时刻 $\xi \in (a, b)$, 使 m 在此时刻 ξ 的瞬时速度 $f'(\xi)$ 等于 m 在 $[a, b]$ 的平均速度.

注 2 由定理 2.5.2 可得如下有用的推论.

推论 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导. 如果对所有 $x \in (a, b)$ 都有 $f'(x) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中为常值函数.

进而可得, 当函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都满足定理 2.5.2 的条件, 并且 $f'(x) =$

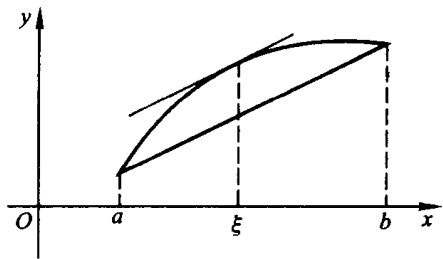


图 2.5.1

$g'(x)$ 对 $x \in (a, b)$ 成立时, 则

$$f(x) = g(x) + C, \quad x \in (a, b), \quad (2.5.2)$$

其中 C 为一个常数.

定理 2.5.3 (柯西, Cauchy) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $g'(x) \neq 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (2.5.3)$$

证 只要作辅助函数

$$F(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \right\} \quad (a \leq x \leq b).$$

例 1 利用拉格朗日中值定理证明: 当 $0 < a < b$ 时, 有

$$1 - \frac{a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1.$$

证 考虑函数 $\ln x, x \in [a, b]$. 此函数在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 故由拉格朗日中值定理得

$$\ln \frac{b}{a} = \ln b - \ln a = \frac{1}{\xi} (b - a), \quad a < \xi < b.$$

于是, 由 $\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$ 得

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

例 1 得证.

2.5.2 求极限的洛必达法则

在 § 2.2 中遇到的不定型极限, 本节可以得到部分解决. 不定型共有 7 种: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. 利用导数来确定不定型极限是很得力的工具.

定理 2.5.4 (洛毕达, L'hospital) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $a \in \mathbf{R}$ 的某个

邻域中满足:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{与} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \quad (2.5.4)$$

这里 a 可以是有限值, 也可为 ∞ , 并且有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad (2.5.5)$$

A 可以是有限值, 也可为 ∞ . 则我们有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A. \quad (2.5.6)$$

证 由定理 2.5.3 便可得到证明.

这就是洛必达法则. 这个法则对 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型也成立, 亦即条件(2.5.4)换为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{与} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, \quad (2.5.7)$$

定理的结论也成立.

例 2 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

解 这是 $\frac{0}{0}$ 不定型, 符合洛必达法则的条件(2.5.4), 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

例 3 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}, \alpha > 0$.

解 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型, 符合洛必达法则的条件(2.5.5), 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0.$$

其余 5 种不定型可经过变形化为 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 型. 例如对于 $y = u(x)^{v(x)}$, 可化为 $y = \exp\{v(x) \ln u(x)\}$.

例 4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x, \alpha > 0$.

解 这是 $0 \cdot \infty$ 不定型, 经计算得到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0.$$

例 5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$.

解 这是 0^0 不定型, 可由

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{1+\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left\{ \frac{1}{1+\ln x} \ln x \right\} = \exp \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{1+\ln x} \ln x \right\} = e$$

计算得到.

洛必达法则还可以连续使用,例如,在第一次对 $\frac{0}{0}$ 使用法则后,得到的还是 $\frac{0}{0}$,则只要仍然满足条件,就可以继续使用,直到得到确定的值为止.读者可以灵活处理.

2.5.3 函数性质及其图形的研究

对于函数 $y=f(x)$,我们研究其单调性与极值点,凹凸性与拐点,渐近性质与渐近线等,这些性质对研究函数起着关键作用,掌握了这些关键性质,就可研究函数、作函数的图像.

1. 函数的展开,泰勒公式及其余项

n 次多项式 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(-\infty, \infty)$ 有定义,而且有任意阶的导数

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_1 + \cdots + na_nx^{n-1}, \\ p''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + \cdots + (n-1)na_nx^{n-2}, \\ p'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + \cdots + (n-3)(n-1)na_nx^{n-3}, \\ &\dots\dots\dots \\ p^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdots na_n, \\ p^{(k)}(x) &= 0 \quad (k > n). \end{aligned}$$

在诸多的函数中,多项式是比较简单又易于计算的.此外,它还可以用其各阶导数来表示.事实上,在上面的各式中,令 $x=0$,得到

$$a_0 = p(0), \quad a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{p''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

于是, $p(x)$ 可以用其各阶导数表示

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (2.5.8)$$

对于形式比较复杂的函数 $f(x)$,即使有各阶导数 $f^{(k)}(x)$,也不可能有如 (2.5.8) 形式的表示.但是,如果能用形如 (2.5.8) 的多项式近似地代替,并且能知道它们之间的误差,就可以通过对函数 $f(x)$ 的近似多项式的研究,而得到 $f(x)$ 的性质.这就是研究函数 $f(x)$ 的泰勒展开式的目的.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-a, a)$, $a > 0$, 定义,并且有直到 n 阶的导数

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x).$$

我们写出一个形如 (2.5.8) 式的多项式

$$p(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad (2.5.9)$$

这个多项式能否起到我们所希望的作用呢? 为此, 我们作差

$$r_n(x) = f(x) - p(x), \quad (2.5.10)$$

用归纳法可以证明(留作习题)

$$r_n(x) = o(x^n), \quad (2.5.11)$$

也就是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0.$$

称 $o(x^n)$ 为皮亚诺(G. Peano)余项, 并将(2.5.10)写为

$$f(x) = p(x) + r_n(x).$$

在 $f^{(n+1)}(x)$ 存在的假设下, 还可证明余项 $r_n(x)$ 可表示为拉格朗日余项:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in [0, x] \text{ 或 } \xi \in [x, 0]; \quad (2.5.12)$$

与柯西余项

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} (1-\theta)^n x^{n+1}, \quad \theta \in [0, 1]. \quad (2.5.13)$$

由(2.5.9)与(2.5.10), 我们写出函数 $f(x)$ 的泰勒展式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x), \quad (2.5.14)$$

其中 $r_n(x)$ 可以是皮亚诺余项, 或拉格朗日余项, 或柯西余项.

公式(2.5.14)可视为函数 $f(x)$ 在以 $x=0$ 为中心的区间 $(-a, a)$ (即 $x=0$ 附近) 的展开式. (2.5.14) 也可以在以 $x=x_0$ 为中心的区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ (即 $x=x_0$ 附近) 成立, 只需假设 $f(x)$ 的各阶导数 $f^{(k)}(x_0)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中存在, 并将公式中的 x^k 换为 $(x-x_0)^k$ 即可.

我们给出熟悉的基本初等函数的泰勒展式.

(1) 指数函数

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x).$$

(2) 对数函数

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

(3) 三角函数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x),$$

$$m = 1, 2, 3, \cdots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + r_{2m+1}(x),$$

$$m = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + r_{2m}(x),$$

$$m = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + r_{2m}(x),$$

$$m = 1, 2, 3, \dots.$$

(4) 幂函数

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!} x^n + r_n(x).$$

以上公式中都是将函数在 $x=0$ 的邻域中展开, 有些参考书上称这种展开为麦克劳林(C. Maclaurin)展式, 而称在 $x=x_0$ 的展式为泰勒展式.

2. 函数的单调性、极值点

在 § 2.2.3 中已给出单调函数的定义, 现在利用导数作为工具来判断函数的单调性.

定理 2.5.5 (广义单调的充要条件) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 广义单调增(广义单调减)的充要条件是 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) 对每个 $x \in (a, b)$ 成立.

证 我们对广义单调增情形证明, 广义单调减情形可类似得到.

必要性 由广义单调增函数的定义知

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

因导数 $f'(x)$ 存在为有限数, 故在上式中令 $\Delta x \rightarrow 0$, 便立即得到 $f'(x) \geq 0$.

充分性 对于任一点 $x \in (a, b)$, 在 $[x, x+\Delta x]$ 上使用定理 2.5.2(拉格朗日中值定理)得

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(\xi), \quad \xi \in [x, x+\Delta x].$$

由假设 $f'(\xi) \geq 0$, 从而 $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$, 充分性得证.

定理 2.5.6 (函数单调的一个充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 则当 $f'(x) > 0$ (< 0) 对每个 $x \in (a, b)$ 成立时, $f(x)$ 在 (a, b) 单调增(单调减).

证 对于 (a, b) 中任意两点 $x_1 < x_2$, 使用中值定理 2.5.2 得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0,$$

从而得到 $f(x)$ 是单调增的.

例 6 设 $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$, 试问在什么区间上函数为增函数, 什么区间上为减函数?

解 函数的定义域为 $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. 求导数

$$f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

只有当 $x=1$ 时 $f'(1)=0$. 由定理 2.5.4 知,

在 $(-\infty, -1)$ 中, $f'(x) < 0$, 故函数减少;

在 $(-1, 1)$ 中, $f'(x) > 0$, 故函数增加;

在 $(1, +\infty)$ 中, $f'(x) < 0$, 故函数减少.

此例中有两个关键点, $x=-1$, $x=1$, 自变量 x 通过它们时, 函数改变符号, 因此函数的单调性也有所改变. 同时也注意到, x 从 $x \rightarrow 1^-$ 到 $x \rightarrow 1^+$, 函数由增大到减小, 使 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的值都比 $f(1)$ 小. 于是我们引入极值的概念.

定义 2.5.1 (极值点、极值) 设函数 $f(x)$ 在 $\xi \in D_f$ 的某个邻域 $U \subset D_f$ 中满足: 对每个 $x \in U$ 都成立 $f(\xi) \geq f(x)$ ($f(\xi) \leq f(x)$), 则称点 ξ 为 $f(x)$ 的一个极大值点(极小值点), 极大值点与极小值点统称极值点. 称 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值(极小值), 极大值与极小值统称极值.

函数 $f(x)$ 在 D_f 的所有极大值(极小值)中最大的(最小的), 称为函数的最大值(最小值).

我们把可能发生极值的点称为极值嫌疑点. 极值嫌疑点有以下三种: ①使 $f'(x)=0$ 的点; ②使 $f'(x)$ 不存在的点; ③定义域的边界点. 但是, 极值嫌疑点不一定是极值点. 看两个例.

① 使 $f'(x)=0$ 的点未必是极值点的例:

函数 $f(x) = x^3$. 其导数 $f'(x) = 3x^2$ 在 $x=0$ 处等于 0, 但 $x=0$ 不是极值点(图 2.5.2(a)).

② 使 $f'(x)$ 不存在点也可能是极值点的例:

函数 $f(x) = |x|$. 其导数 $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 不存在, 但 $x=0$

是极值点(图 2.5.2(b)).

下面是极值点的两个充分性判别法.

定理 2.5.7 (极值点的一个充分条件) 设函数 $f(x)$ 在点 $\xi \in D_f$ 的某一邻域 U 内连续、可导(点 ξ 可能除外), 且 ξ 为 $f(x)$ 的极值嫌疑点. 对于 $x \in U$, 如果

当 $x < \xi$ 时有 $f'(x) > 0$, 而当 $x > \xi$ 时有 $f'(x) < 0$, 则 ξ 为极大值点;

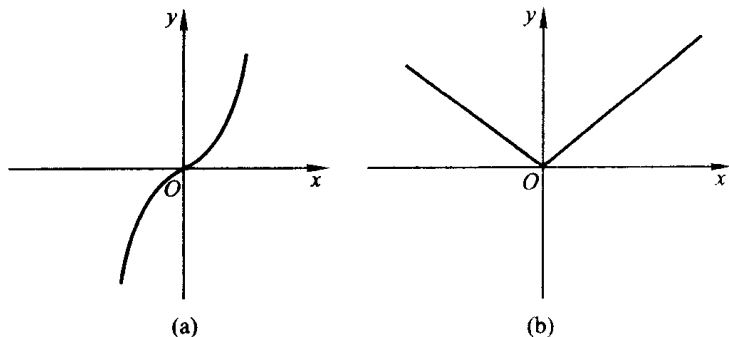


图 2.5.2

当 $x < \xi$ 时有 $f'(x) < 0$, 而当 $x > \xi$ 时有 $f'(x) > 0$, 则 ξ 为极小值点.

定理 2.5.8 (极值点的一个充分条件) 设函数 $f(x)$ 在点 $\xi \in D_f$ 的某一邻域 U 内连续、可导, 且 $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi)$ 存在. 如果

$f''(\xi) < 0$, 则 ξ 为极大值点;

$f''(\xi) > 0$, 则 ξ 为极小值点;

$f''(\xi) = 0$, 则不能确定 ξ 是否为极值点.

定理 2.5.7 与 2.5.8 都可用于例 1 而得到同样结果.

3. 函数的凹凸性、拐点

研究函数时, 另一个重要概念是函数的凹凸性. 从图 2.5.3 容易理解图像的凹凸.

定义 2.5.2 (凹凸性) 函数 $f(x)$ 的图像是 xy 平面上的集合

$$\text{graph } f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), x \in D_f\},$$

所对应的曲线记为 $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$.

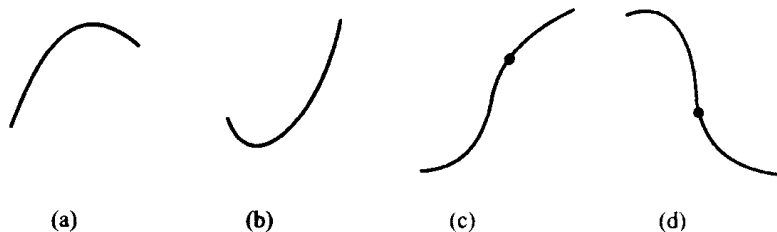


图 2.5.3

设曲线 Γ 在点 $\eta \in D_f$ 存在切线 T_η , 且在 η 的某个邻域 $U \subset D_f$ 中满足: 对每个 $x \in U$, 曲线 Γ 上的点 $M(x, f(x)) \in \Gamma$ 都在切线 T_η 的上方, 则称曲线 Γ 在点 η 是凹的; 反之, 对每个 $x \in U$, 曲线 Γ 上的点 $M(x, f(x)) \in \Gamma$ 都在切线 T_η 的下方, 则称曲线 Γ 在点 η 是凸的.

称曲线 Γ 的凹、凸性的分界点为拐点(也称变曲点).

现在给出用二阶导数判别拐点的条件.

定理 2.5.9 (凹凸的充要条件) 设函数 $f(x)$ 在点 $\eta \in D_f$ 的某一邻域 U 内连续、可导, 则其曲线 Γ 为凹(凸)的充要条件是: $f'(x)$ 在 U 上单调增(单调减).

定理 2.5.10 (凹凸的充分条件) 设函数 $f(x)$ 在点 $\eta \in D_f$ 的某一邻域 U 内连续、可导, 且 $f''(x)$ 存在(可能不包括 η). 如果

$f''(x) < 0$ 在 U 成立, 则 Γ 在 U 中是凸的;

$f''(x) > 0$ 在 U 成立, 则 Γ 在 U 中是凹的;

$f''(x)$ 在通过 η 时改变符号, 则 η 是 Γ 的拐点.

不难看出, 拐点嫌疑点包括: ①使 $f''(x) = 0$ 的点; ②使 $f''(x)$ 不存在的点.

例 7 设 $f(x) = 3x^2 - x^3$, 试问在什么区间上函数为凹, 什么区间上为凸?

解 由 $y'' = 6(1 - x)$, 且 $f''(1) = 0$. 故由定理 2.5.9, 函数在 $(-\infty, 1)$ 是凹的, 在 $(1, +\infty)$ 是凸的.

例 8 设 $f(x) = x - x^{5/3}$, 试判断函数的凹凸区间.

解 由 $y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3}$ 知, y'' 不存在零点, 但 $x = 0$ 不存在二阶导数. 此时同样可由定理 2.5.7 判得: 函数在 $(-\infty, 0)$ 是凸的, 在 $(0, +\infty)$ 是凹的.

定理 2.5.11 (拐点的充分条件) 设函数 $f(x)$ 在点 $\eta \in D_f$ 的某一邻域 U 内二次连续可导, $f''(\eta) = 0$, 且 $f'''(\eta) \neq 0$, 则 η 为 Γ 的拐点.

4. 函数的渐近线

在自变量或函数趋向于无穷大的情形, 要判断函数的变化趋势, 常借助于其渐近线.

定义 2.5.3 (渐近线) 垂直渐近线: 如果当自变量 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $y = f(x)$ 趋向于 $+\infty$ (或 $-\infty$), 亦即,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty),$$

则称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线;

水平渐近线: 如果当自变量 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$) 时, 函数 $y = f(x)$ 趋向于常数 A , 亦即,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A),$$

则称 $y = A$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线;

斜渐近线: 如果直线 $L: y = ax + b$ 使得函数 $y = f(x)$ 所对应的曲线 Γ 到 L 的距离 d 满足:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} d = 0 \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow -\infty} d = 0),$$

则称 $L: y = ax + b$ 为 $f(x)$ 的斜渐近线.

判别 L 为斜渐近线有如下充要条件.

定理 2.5.12 (斜渐近线的充要条件) 设函数 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有定义 ($c > 0$), 则直线 $L: y = ax + b$ 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的斜渐近线, 当且仅当

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a; \quad \text{且} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b; \quad (2.5.15)$$

对于 $x \rightarrow -\infty$ 情形可类似叙述.

证 只要注意到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} d = 0$ 等价于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ 即可.

例 9 求函数 $f(x) = \exp \left\{ \frac{1}{x^2} \right\} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线.

解 这里 $\exp x \equiv e^x$. 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty,$$

知 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线; 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4},$$

故 $y = \frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线. 此函数没有其他的渐近线.

5. 函数作图

函数作图大致可分为以下步骤.

- (1) 确定函数的定义域与周期性;
- (2) 确定函数的奇偶性: $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(-x) = f(x)$, 或没有奇偶性;
- (3) 确定函数的有界性: $|f(x)| \leq M$ 对每个 $x \in D_f$ 成立, 或没有有界性;
- (4) 确定函数的单调性与极值点;
- (5) 确定函数的凹凸性与拐点;
- (6) 确定函数的渐近线;
- (7) 绘制函数的简图.

例 10 作函数 $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ 的简图.

解 此函数定义域为: $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. 无奇偶性、无界.

函数的渐近线由公式(2.5.15)求得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = 1,$$

得斜渐近线 $y = x + 1$. 就所得数据列表如下.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$	+	0	-	无	-	0	+
$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$	-	-	-	无	+	+	+
$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$	增、凸	极大	减、凸	间断	减、凹	极小	增、凹

由此可作函数的简图, 即图 2.5.4.

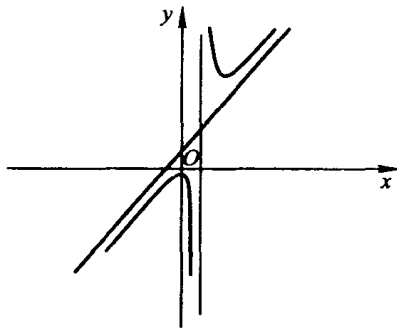


图 2.5.4

2.5.4 平面曲线的曲率

本小节假设曲线 l 由参数式

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq T \quad (2.5.16)$$

给出, 并且 φ, ψ 有一阶、二阶连续导数, φ', ψ' 不同时为 0.

对于曲线, 除了以上所讨论的性质外, 还常常需要知道它的弯曲程度, 本节我们来研究曲线弯曲程度的数学表示式.

设 MM_0 为曲线 l 上的一段弧 (图 2.5.5), 弧长为 σ (弧长的确切定义将在第三章中详细给出). 在弧的两端作切线 MT, M_0T_0 , 它们正向的夹角为 ω (弧度).

用比值 $\frac{\omega}{\sigma}$ 表示弧 MM_0 的弯曲程度是合适的, 因为这个比值表现了其切线转动时的变化情况. 我们称此比值为弧 MM_0 的“平均曲率”.

易见, 对于圆周来说, 圆周上各点的弯曲程度是一样的, 亦即上述比值是一个常数, 但是对于一般曲线, 各点的弯曲程度是不同的. 为此我们定义“曲率”.

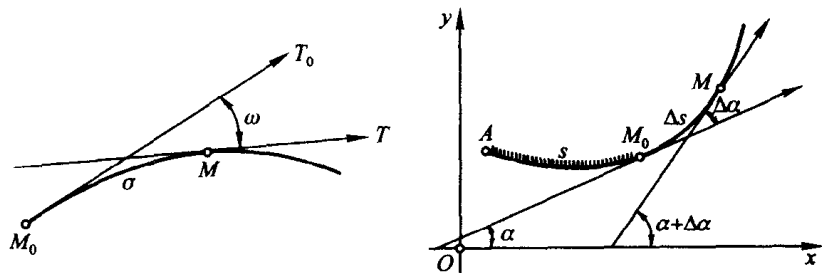


图 2.5.5

定义 2.5.4 (曲线的曲率) 当曲线 l 的点 M 沿曲线趋于点 M_0 时,若弧 MM_0 的平均曲率 $\frac{\omega}{\sigma}$ 趋于一个确定的有限极限 k

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\omega}{\sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\sigma} = k,$$

则称 k 为点 M_0 的曲率.

对于圆周,我们有 $\frac{\omega}{\sigma} = \frac{\omega}{R\omega} = \frac{1}{R}$, 故对于圆周, $k = \frac{1}{R}$.

在曲线 l 参数式(2.5.16)与 φ, ψ 有一阶、二阶连续导数, φ', ψ' 不同时为 0 的假设下,我们推导曲率的数学表示.

设曲线 l 上的点 M_0 对应的弧值为 $s(t_0)$, $M \in l$ 对应的弧值为 $s(t_0) + \Delta s$. 两点 M 与 M_0 的切线的倾斜角的夹角的增量为 $\omega = |\Delta \alpha|$, 弧 M_0M 的弧长为 $\sigma = |\Delta s|$. 于是

$$k = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\omega}{\sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$$

由 φ', ψ' 不同时为 0, 故 $(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2 > 0$. 例如, 可设 $\varphi'(t) \neq 0$, 计算

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\alpha'_t}{s'_t}. \quad (2.5.17)$$

对于 α'_t , 据切线斜率的定义, 有

$$\tan \alpha = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \text{与} \quad \alpha = \arctan \frac{y'_t}{x'_t},$$

得

$$\alpha'_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^2} = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}.$$

根据 $s(t)$ 的一个公式 $s'_t = \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}$ (参看第三章 3.4 节), 将 α'_t, s'_t 代

入(2.5.17),得

$$k = \frac{|x'_t y''_t - x''_t y'_t|}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.5.18)$$

若曲线 l 由显式 $y = f(x)$ 给出,则

$$k = \frac{|y''_{xx}|}{[1 + (y'_x)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.5.19)$$

最后,若曲线 l 由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 给出,则

$$k = \frac{|r^2 + 2(r'_\theta)^2 - r r''_{\theta\theta}|}{[r^2 + (r'_\theta)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.5.20)$$

定义 2.5.5 (曲线的曲率圆、曲率半径、曲率中心) 若一个圆满足:① 与曲线 l 在 M_0 相切;② 与曲线 l 在 M_0 的凹向相同;③ 与曲线 l 在 M_0 的曲率相同;则称此圆为曲线 l 在点 M_0 的曲率圆.称曲率圆的半径 $R = \frac{1}{k}$ 为其曲率半径,曲率圆的中心为其曲率中心.

曲线的曲率半径可由公式(2.5.18)、(2.5.19)、(2.5.20)求得.

§ 2.6 微 分

2.6.1 微分的定义、几何意义

回顾导数的定义

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

用高阶无穷小来表示上述极限

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + o(\Delta x),$$

其中 $o(\Delta x) \equiv \alpha$ 是 Δx 的高阶无穷小,或写为

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \quad (2.6.1)$$

(2.6.1)式中, $f'(x)\Delta x$ 关于 Δx 是线性的,而 $\alpha\Delta x$ 关于 Δx 是高阶无穷小.

从几何上来看更为清楚. $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的图像曲线 Γ 在 P 点的切线的斜率(见图 2.6.1).

对应于 $x + \Delta x$ 与 x 的函数值之差 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 可由三角形 $PP'S$ 中的边 $P'S$ 表示,并且 Δx 由边 PS 表示,于是,在三角形 PQS 中,边 QS 正是 $f'(x)\Delta x$,而后者恰是 Δy 的线性部分.这个线性部分 $f'(x)\Delta x$ 起着重要作用,被称之为微分.

定义 2.6.1 (微分) 设函数 $f(x)$ 在定义域 $D_f = (a, b)$ 中可导,我们称

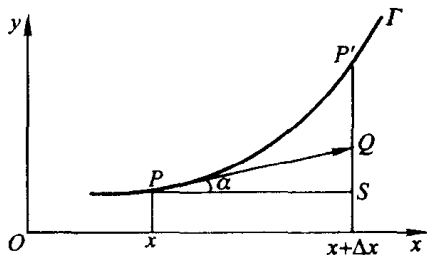


图 2.6.1

$f'(x)\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 的微分, 记为 dy , 并称函数 $f(x)$ 可微. 同时, 定义自变量 x 的微分为 $dx \equiv \Delta x$, 于是

$$dy = f'(x)dx. \quad (2.6.2)$$

从微分的定义可知, 函数 $f(x)$ 的微分存在的充要条件是函数 $f(x)$ 的导数存在, 亦即, 函数的可导性与可微性等价.

形式上用 dx 除以 (2.6.2) 两边, 得

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \quad (2.6.3)$$

这就表示, 对原先使用的导数符号 $\frac{dy}{dx}$, 现在可以作为一个比值看待. 由此可体会到微商 (导数) 与微分的内在的、本质的联系.

高阶微分与高阶导数类似, 是用归纳方法定义的:

$$d^n y = d(d^{n-1} y). \quad (2.6.4)$$

在求高阶微分时, 可由高阶导数得到. 由 $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$, 可得

$$d^n y = y^{(n)} dx^n. \quad (2.6.5)$$

2.6.2 微分的运算法则

从理论上说, 求微分等于求导数. 对微分, 我们也可写出其运算法则.

定理 2.6.1 (微分的四则运算) 设 $f(x), g(x)$ 是在区间 (a, b) 上的可导函数, 则在 (a, b) 上成立:

$$(i) \quad d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg, \quad \alpha, \beta \text{ 为常数},$$

$$(ii) \quad d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg,$$

$$(iii) \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

$$(iv) \quad d^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} f \cdot d^k g, \quad (d^0 f = f, d^0 g = g).$$

例 1 设函数 $y = y(x)$ 满足 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 dy .

解 用隐函数求导法则与复合函数求导法则得

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{xy'_x - y}{x^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x + yy'_x),$$

化简得 $(x - y)y'_x = x + y$. 于是, 当 $x \neq y$ 时, 有

$$dy = \frac{x + y}{x - y} dx.$$

例 2 若 $y = x^\mu$, 求 $d^3 y$

解 由式(2.6.5),

$$d^3 y = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)x^{\mu-3} dx^3.$$

2.6.3 微分的应用

微分在函数的近似计算与误差估计中有重要作用. 事实上, 公式(2.6.1)

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$$

就是近似计算的依据, 其中 $\alpha\Delta x$ 是 Δx 的高阶无穷小. 在今后介绍级数部分时, 还会进一步分析这个 α .

例 3 求函数 $y = x^3 + 2x^2$ 的增量 Δy 关于 Δx 的线性部分.

解 由公式(2.6.1), 得

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x)^2 - x^3 - 2x^2 \\ &= (3x^2 + 4x)\Delta x + (3x + 2)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3, \end{aligned}$$

这里 $(3x^2 + 4x)\Delta x$ 便是 Δy 关于 Δx 的线性部分, 而

$$(3x + 2)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \{(3x + 2)\Delta x + (\Delta x)^2\}\Delta x \equiv \alpha\Delta x,$$

$\alpha\Delta x$ 是 Δx 的高阶无穷小.

例 4 求函数 $y = (1 + x)^\mu$ 、 $y = e^x$ 、 $y = \ln x$ 、 $y = \sin x$ 、 $y = \tan x$ 用微分表示的近似公式.

解 由公式(2.6.1)得

$$y = (1 + x)^\mu \approx 1 + \mu x, \quad \text{特别地, } \sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x;$$

$$y = e^x \approx 1 + x; \quad y = \ln x \approx x; \quad y = \sin x \approx x; \quad y = \tan x \approx x.$$

例 5 设有周期为 1 秒的一单摆. 在冬季, 它的摆长缩短 0.01 厘米. 试问此单摆每天约快多少?

解 单摆的周期与摆长有如下关系: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 故其周期为 1 秒时相应的摆长为 $l = \frac{g}{(2\pi)^2}$.

因为摆长缩短 0.01 厘米而引起周期的改变,我们用其改变量 ΔT 的微分 dT 来近似代替 ΔT ,而

$$dT = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{l}} \Delta l.$$

将 $l = \frac{g}{(2\pi)^2}$ 与 $\Delta l = -0.01$ 代入上式,得

$$\Delta T \approx dT = \frac{2\pi^2}{g} (-0.01) = -0.0002 \text{ (秒)}.$$

这就表示由于摆长缩短 0.01 秒所引起的(近似的)周期缩短 0.0002 秒,于是每天约快 $86400 \times 0.0002 = 17.28$ 秒.

例 6 求方程根近似值的切线法.

设方程 $f(x) = 0$ 的根 β 有一近似值 x_0 ,令 $\Delta x = \beta - x_0$,则由

$$0 = f(\beta) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

知 $\Delta x \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$,从而有

$$\beta = x_0 + \Delta x = x_1 \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

这个 x_1 就是 x_0 作为近似根的一个改进.对 x_1 进行同样改进,并将过程继续进行下去,除特殊情形外,一般地就可能得到愈来愈接近 β 的近似根(至于何种曲线使用此方法可得到这种根,有专门的讨论,读者可参考有关计算数学的参考书.图 2.6.2 是一种例外情形).从几何上看, x_1 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线与 x 轴的交点的坐标.

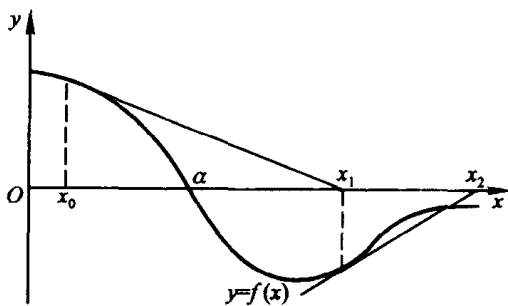


图 2.6.2

上述几何意义还表明了本方法的名称——切线法的由来.

例如,设 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 7$,且 $x_0 = 1.8$ 是方程的实根的近似值(方程 $f(x) = 0$ 只有一个实根).用切线法可得

$$x_1 = 1.8 - \frac{f(1.8)}{f'(1.8)} = 1.806, \quad x_2 = 1.806 - \frac{f(1.806)}{f'(1.806)} = 1.8063, \quad \dots$$

由于 $f(1.8063) < 0$, $f(1.807) > 0$, 从而, 方程的实根在 1.8063 与 1.807 之间. 因此, 用 x_2 作为近似根时, 其误差 $< 1.807 - 1.8063 < 0.001$.

例 7 设测量某物体长度 x 时产生的误差为 Δx , 则相应地由 x 去求它的以 10 为底的对数 $y = \log_{10} x$ 时, 也将产生误差 Δy . 若用 dy 代替 Δy , 我们有:

$$\Delta y \approx dy = \frac{dy}{dx} \Delta x = \frac{\log_{10} e}{x} \Delta x = 0.4343 \frac{\Delta x}{x}.$$

这里用到的 $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_{10} e}{x}$ 将在下面微分运算时给出证明.

这样, x 的对数 y 的绝对误差 Δy 可由数 x 的相对误差 $\frac{\Delta x}{x}$ 确定, 反之也正确. 利用这一想法, 就可获得关于常用的 250 毫米对数尺的准确度的概念.

例如在放置瞄准器或计数时, 两次得到的结果发生 0.1 毫米的误差, 则在取对数运算时对应误差为

$$\Delta y = \frac{0.1}{250} = 0.0004,$$

因此, 用上述公式可近似地得到相应计数时发生的相对误差

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.0004}{0.4343} = 0.00092 \dots \approx 0.001.$$

例 8 设悬挂在两根电线杆上的电线 AB , 其跨度为 $|AB| = 2l$ (图 2.6.3), 垂度为 s . 由于环境变化 (温度或外加负荷等) 引起垂度 s 变化 Δs , 试求由此产生电线 AB 长度 $2f$ 变化的近似表示.



图 2.6.3

解 电线 AB 的长度 $2f$ 是其垂度 s 的函数, 实用时常由以下 (近似) 公式表示

$$f = h(s) \approx l \left(1 + \frac{2s^2}{3l^2} \right).$$

于是

$$\Delta f \approx df = \frac{4}{3} \frac{s}{l} \Delta s,$$

这就是长度改变量 Δf 与垂度改变量 Δs 之间的关系.

例 9 已知圆形电路(图 2.6.4)作用于其轴上与中心 O 的距离为 x 的单位磁极的力是

$$F = \frac{k}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 k 为常数, a 为半径. 试求此圆形电路作用于沿轴放置的长度为 Δx 的磁铁 NS 的力.

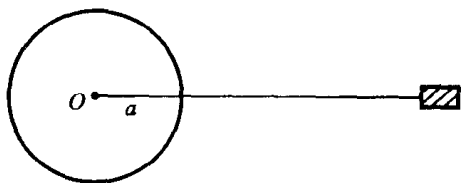


图 2.6.4

解 我们想象 N 极集中了正磁量 m , 而 S 极集中的负磁量 $-m$. 由物理知识, 电流作用于磁铁的总力 F 为

$$\begin{aligned} F &= \frac{km}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{km}{[a^2 + (x + \Delta x)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= -km \cdot \Delta \left[\frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= -km d \left[\frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 3km \Delta x \left[\frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

用微分估计误差, 也是方便又实用的方法. 其依据也是公式

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x.$$

我们用 δx 表示 x 的最大绝对误差, 即, $|\Delta x| \leq \delta x$. 于是, 可由 $|\Delta y| \leq \delta y$ 而取

$$\delta y = |y'_x| \cdot \delta x$$

作为 y 的最大绝对误差.

例 10 给出由于测量的误差而引起的球体积所产生的误差.

解 为确定球的体积 V , 首先量得球的直径 D , 再由公式 $V = \frac{\pi}{6} D^3$, 并利用(2.6.6)得绝对误差

$$\delta V = \frac{\pi}{2} D^2 \delta D.$$

从而相对误差为

$$\frac{\delta V}{V} = 3 \frac{\delta D}{D}.$$

习 题

1. 求下列函数的单调区间

(1) $y = 3x - x^2$

(2) $y = x - 2\sin x$

(3) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

(4) $y = x - e^x$

2. 求下列函数的极值

(1) $y = x + \frac{1}{x}$

(2) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$

(3) $y = \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

(4) $y = x^2 e^{-x^2}$

(5) $y = e^x \cos x$

3. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值

(1) $y = \sqrt{5-4x}, \quad x \in [-1, 1]$

(2) $y = \sin x + x, \quad x \in [0, 4\pi]$

(3) $y = \sin 2x - x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

4. 求下列函数图形的凹凸区间及拐点

(1) $y = x^4 - 2x^3 + 1$

(2) $y = x \arctan \frac{1}{x}$

(3) $y = \ln(1+x^2)$

(4) $y = x + \arctan x$

5. 构造下列函数的图形

(1) $y = x^3 - 3x - 2$

(2) $y = \frac{2x+1}{3x-2}$

(3) $y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$

(4) $y = \frac{x^4 - 3x^2 + 3x + 1}{x-1}$

(5) $y = xe^{-\frac{1}{4}x^2}$

6. 计算下列各极限值

(1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \tan \frac{1}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{1}{2}} \ln \ln x$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x$

(6) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

(7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \frac{1}{x}$

(8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 - x \sin \frac{1}{x} \right)$

(9) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$

(10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

(11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin x}$

(12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + x}{\sin x - x}$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{(e^x - 1)\ln(1+x^2)} \quad (14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x) + x - 1}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x + \sin \frac{1}{x}}{\ln x + \cos \frac{1}{x}}$$

7. 设 $a > 0, n \in \mathbf{N}$, 试证: 当 $|x|$ 充分小时, 有近似公式 $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}$, 并由此计算 $\sqrt[4]{80}$ 的近似值.

8. 用微分 dy 代替改变量 Δy , 计算 $\sqrt[3]{1.02}$ 与 $\sin 29^\circ$ 的近似值.

9. 微分形式的不变性: “试证: 当 x 是中间变量 $x = \varphi(t)$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的微分 $dy = f'(x)dx$ 依然成立”. 利用微分形式的不变性, 先计算 $x = e^{-(2t^2+1)} \cos 3x$ 的微分 dy , 然后求出 y' .

§ 2.7 多元函数

多元函数是 § 2.2 中函数概念的自然推广, 本节中我们对相应的概念作清楚的叙述, 并着重强调一元与多元函数的相同与不同.

2.7.1 多元函数的概念

一元与多元函数的定义相同之处是: 都包含三个要点: ① 给定的对应规律 f , ② 自变量 x 及定义域 D_f , ③ 因变量 y 及值域 R_f .

不同之处是: 自变量 x 不再是在实数直线 $\mathbf{R}$ 上变化, 而是在平面 $\mathbf{R}^2$ 、或在空间 $\mathbf{R}^3$, 或在 n 维空间 $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}$ 中变化, 一般为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) (n \geq 2)$.

正是由于有定义上的相同与不同, 才反映出性质、方法等方面的相同与不同.

本节研究的变量的变化域是 n 维空间 $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ 中的集合, 例如闭方体

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta]^n &= [\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots; \alpha_n, \beta_n] \\ &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, \alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}, j = 1, 2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

类似可考虑开方体或其他类型的集合.

现在给出多元函数的定义.

定义 2.7.1 (多元函数) 设变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ 与 y 分别在集合 $X \subset \mathbf{R}^n$ 与 $Y \subset \mathbf{R}$ 中变化. 如果按照一个给定的规律 f , 对于每个 $x \in X$, 有惟一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 y 为 x 的函数, 记为 $y = f(x)$. 函数 $y = f(x)$ 的自变量 x 的变化范围 X 称为函数的定义域, 记为 $X = D_f$; 因变量 y 的变化范围

Y 称为函数的值域, 记为 $Y = R_f$.

多元函数 $y = f(x)$ 的定义域 D_f 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集, 故 n 元函数也记为 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. 通常, 二元函数记为 $z = f(x, y)$, 三元函数记为 $w = f(x, y, z)$, 等等.

由第一章知, 一元与二元函数有直观的几何意义: 一元函数为 $y = f(x)$, 的图像是 $\mathbf{R}^2$ 中的曲线(图 2.7.1(a)); 二元函数 $z = f(x, y)$ 所代表的几何图形是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面(图 2.7.1(b)). 三元函数 $w = f(x, y, z)$ 的定义域 $D_f \subset \mathbf{R}^3$ 可看作 $\mathbf{R}^3$ 中的区域(图 2.7.1(c)).

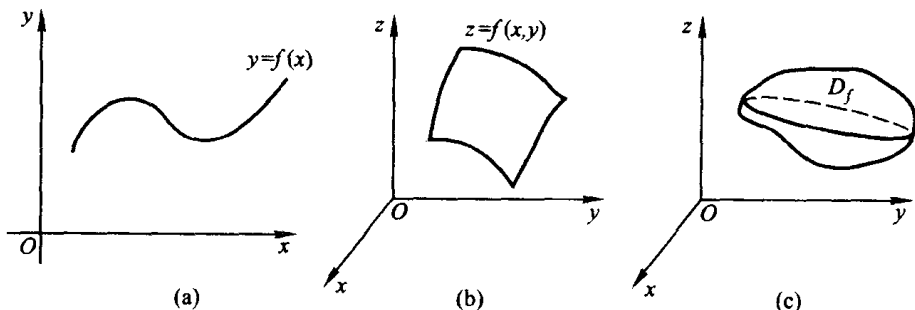


图 2.7.1

多元函数的四则运算、复合等, 都与一元情形类同.

例 1 二元函数 $z = f(x, y) = \sqrt{1 - 4x^2 - y^2}$ 的定义域 D_f 为

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 - 4x^2 - y^2 \geq 0\},$$

它是 xOy 平面上由椭圆 $1 - 4x^2 - y^2 = 0$ 所围成的区域. 而函数 $z = f(x, y) = \sqrt{1 - 4x^2 - y^2}$ 所代表的几何图形是空间中椭球面 $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的上半部分.

2.7.2 多元函数的极限

对于多元函数, 二元与三元函数以上的情形有许多相似之处, 为叙述简单, 我们多以二元或三元情形为例.

定义 2.7.2 (邻域) 对于正数 $\delta > 0$ 及点 $P_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$, 我们称

$$B_\delta(P_0) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2\}$$

为 P_0 的 δ 邻域, 而称 $B_\delta^*(P_0) = B_\delta(P_0) \setminus P_0$ 为 P_0 的去心 δ 邻域.

定义 2.7.3 (二重极限) 设二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 $D_f \subset \mathbf{R}^2$. 如果点 $P_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$ 与常数 A 满足: 对于任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $P(x, y) \in B_\delta^*(P_0)$ 时, 有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x, y)$ 当 $P(x, y) \rightarrow P_0(a, b)$ 时的二重极限, 记为

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = A,$$

或

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A, \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A,$$

也简称其为极限(但要注意区分下面的累次极限).

注 1 定义中的 $P(x, y) \in B_\delta^*(P_0)$ 等价于 $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, 也等价于 $0 < |PP_0| < \delta$.

注 2 $P(x, y) \rightarrow P_0(a, b)$ 表示代表自变量的点 P 落入定点 P_0 的去心 δ 邻域中, 但是不论以什么方式(图 2.7.2), 或者说 P 以任何方式趋向于 P_0 . 注意到一元函数有单边极限(左极限或右极限), 多元情形却只能说“ $P \rightarrow P_0$ 以任何方式”.

注 3 一元与多元函数极限的相同之处是:

① 都用 $\varepsilon - \delta$ 语言给出严格的数学定义; ② 如果极限存在, 则它是惟一的; ③ 极限的四则运算法则成立.

不同之处是: ① 多元函数没有“单调性”概念; ② 一元情形的自变量 $x \rightarrow a$ 方式比较简单, 因此有“单边极限”概念. 而多元情形 $P \rightarrow P_0$ 方式要复杂得多, P 可以以任何方式趋于 P_0 . 从



图 2.7.2

而, 多元情形就有多重极限与累次极限的概念, 却没有“单边极限”.

例 2 试证: 二元函数 $z = f(x, y) = x$ 的极限 $\lim_{P \rightarrow P_0} x$ 存在, 且等于 a , 其中点 P_0 的坐标为 (a, b) .

证 任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f(x, y) - a| = |x - a| < \varepsilon$, 只要取 $\delta = \varepsilon$, 当 $P(x, y) \in B_\delta^*(P_0)$ 时, 恒有

$$|f(x, y) - a| = |x - a| \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon.$$

例 3 试证: 二元函数 $z = f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 当 $P(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时不存在极限.

证 由注 2, 只要对 $P(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 取两种不同的方式, 得到不同的极限值即可.

① 取 $y = 0, x \rightarrow 0$, 则 $\frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$, 故 $\lim_{P \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$.

② 取 $y = x \neq 0$, 则 $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$, 故 $\lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$.

所以 $z = f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 当 $P(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时不存在极限.

定义 2.7.4 (二元函数的累次极限) 设二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 $D_f \subset \mathbf{R}^2$, 又设点 $P_0(a, b) \in \mathbf{R}^2$. 如果对于每一个确定的 y , 极限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \equiv \varphi(y)$$

存在; 然后, 当 $y \rightarrow b$ 时, 极限

$$\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = A$$

存在, 则称 A 为 $f(x, y)$ 当 $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ 时的一个累次极限, 记为

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = A;$$

同样, 可定义另一个累次极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y).$$

两个累次极限不一定都存在, 即使都存在, 也未必相等.

例 4 试证: 二元函数 $f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}$, 当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, 两个累次极限中有一个不存在极限.

证 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y} = \frac{y}{y} = 1 \equiv \varphi(y),$$

故 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1$. 但是, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \sin \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 没有极限.

例 5 试证: 二元函数 $f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$ 当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, 两个累次极限都存在, 但不相等.

证 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \frac{y(y - 1)}{y} = y - 1 \equiv \varphi(y),$$

故 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$. 但是, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = x + 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$.

由此可见, 在求极限过程中, 交换次序是一个非常重要而且须非常谨慎的问题. 有限的运算过程, 交换次序常常是可行的, 但在求极限的无限过程中, 并非总是可行. 下面的定理是一个充分条件.

定理 2.7.1 (二重极限与累次极限的关系) 若二重极限

$$\lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} f(x, y) = A$$

存在;且对任一 y , 单重极限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \varphi(y)$$

存在;则累次极限

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \varphi(y)$$

存在,并等于 A .

这个定理的证明可由定义得到.

值得强调的是:二重极限与累次极限的存在性并无确定的联系.

2.7.3 多元函数的连续性

1. 多元函数连续性定义

定义 2.7.5 (二元函数的连续性) 若函数 $f(x, y)$ 满足:

- (i) 对于点 $P(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $f(a, b)$ 取有限值, 亦即, $(a, b) \in D_f$,
- (ii) 极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ 存在且为有限数,
- (iii) $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$,

则称函数在点 (a, b) 是连续的.

若 $y = f(x, y)$ 在定义域的每一点 $(x, y) \in D_f$ 都连续, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在 D_f 上连续, 并称 $f(x, y)$ 为 D_f 上的连续函数.

连续性同样可用 $\epsilon - \delta$ 语言表示.

2. 多元连续函数的性质

与一元情形一样, 多元连续函数的和、差、积、商(分母 $\neq 0$) 都是连续函数.

为研究二元连续函数是否也成立以下的定理: 中间值定理、有界性定理、一致连续性定理, 我们需引入区域的概念.

定义 2.7.6 (内点、边界点; 开集、闭集; 区域) 设 G 为平面 $\mathbf{R}^2$ 中的点集, $G \subset \mathbf{R}^2$, 称点 $P_0(x_0, y_0) \in G$ 为 G 的内点, 如果存在 P_0 的一个 δ 邻域 $B_\delta(P_0)$ 全部含在 G 中, $B_\delta(P_0) \subset G$.

称点 $Q_0 \in G$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的边界点, 如果在 Q_0 的每一个 δ 邻域 $B_\delta(Q_0)$ 中, 既含有 G 的点, 也含有不属于 G 的点. 集合 G 的边界点的全体, 称为 G 的边界, 记为 ∂G .

若点集 $G \subset \mathbf{R}^2$ 中的点全部都是内点, 则称 G 为开集; 若点集 $F \subset \mathbf{R}^2$ 的补集 $\mathbf{R}^2 \setminus F$ 为开集, 则称 F 为闭集.

若开集 G 中的任意两点之间都可用 G 中的有限条折线段连接起来, 则称此开集为开区域, 并简称为区域. 区域与其边界的并集 $G \cup \partial G$ 称为闭区域.

若存在常数 $M > 0$, 使得平面点集 $G \subset \mathbf{R}^2$ 满足: $G \subset B_M(0)$, 亦即点集 G 全部包含在一个以原点为圆心、以 $M > 0$ 为半径的大圆内, 则称集合 G 为有界集.

开方体 $(a, b; c, d) \subset \mathbf{R}^2$ 为有界区域, 闭方体 $[a, b; c, d] \subset \mathbf{R}^2$ 为有界闭区域.

多元连续函数在有界闭区域上成立中间值定理、有界性定理、一致连续性定理.

2.7.4 多元函数的偏导数

论及多元函数的变化率, 需要分别考虑对自变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的每个分量 $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ 的变化率, 称之为偏导数. 我们仍以二元为例.

定义 2.7.7 (二元函数的偏导数) 设函数 $z = f(x, y)$ 定义在区域 $G \subset \mathbf{R}^2$ 上, 对于 $(x, y) \in G$ 将一个变量 y 看作参数, 给 x 任一改变量 $\Delta x (> 0$ 或 $< 0)$, 保持 $(x + \Delta x, y) \in G$, 相应地, 记 $f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \Delta f_x$, 并称其为函数 $f(x, y)$ 关于 x 的改变量, 或关于 x 的偏增量. 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f_x}{\Delta x} \quad (2.7.1)$$

存在, 则称 $z = f(x, y)$ 关于 x 可导, 称该极限值为 $f(x, y)$ 关于 x 的偏导数(或偏微商), 记为 $f'_x(x_0, y)$, 或 $\frac{\partial f}{\partial x}$.

类似地, 可定义 $f(x, y)$ 关于 y 的偏导数, 记为 $f'_y(x, y)$, 或 $\frac{\partial f}{\partial y}$.

若 $z = f(x, y)$ 在区域 G 的各点关于 x (或 y) 都存在偏导数, 则称它在 G 上关于 x (或 y) 可求偏导数, 并称 $f'_x(x, y)$ (或 $f'_y(x, y)$) 为 $z = f(x, y)$ 的偏导函数, 也记为 $\frac{\partial f}{\partial x}$ (或 $\frac{\partial f}{\partial y}$).

高阶偏导数可用归纳法定义. 一元函数的求导数法则都可酌情使用于求偏导数.

例 6 求函数 $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 - 2y^3$ 的偏导函数.

解 利用初等函数的导数公式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy + y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 2xy - 6y^2.$$

例 7 求函数 $f(x, y) = \sin xy^2$ 的所有二阶偏导函数.

解 两个一阶偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \cos xy^2;$$

四个二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y^2 \cos xy^2)'_x = -y^4 \sin xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (2xy \cos xy^2)'_x = 2y \cos xy^2 - 2xy^3 \sin xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (y^2 \cos xy^2)'_y = 2y \cos xy^2 - 2xy^3 \sin xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2xy \cos xy^2)'_y = 2x \cos xy^2 - 4xy^3 \sin xy^2.$$

我们称 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 与 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 为混合导数.

在例 7 中我们看到, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, 但并非每个函数的混合导数都相等, 这实际上是偏导数交换次序的问题. 我们给出一个判别的充分条件.

定理 2.7.2 (混合导数相等的一个充分条件) 若二元函数 $z = f(x, y)$ 的两个混合导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 与 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 在点 (x_0, y_0) 连续, 则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

这个定理表明, 只要二阶混合导数在 $(x, y) \in G$ 连续, 则混合导数与求偏导数的次序无关. 此结果对于高阶混合导数和三元、四元、…、多元函数也成立.

2.7.5 多元函数的全微分、方向导数

一元函数的导数与微分的存在性是等价的, 多元函数的偏导数已经在 2.7.4 中定义, 类似地可以定义偏微分. 然而, 在多元函数情形, 全微分的概念更有意义与应用.

定义 2.7.8 (二元函数的全微分) 设函数 $z = f(x, y)$ 定义在区域 $G \subset \mathbf{R}^2$ 上, 对于 $P(x, y), P_0(x_0, y_0) \in G$, 由自变量增量 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ 所引起的函数增量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

称为函数 $z = f(x, y)$ 的全增量. 如果存在常数 A, B , 使得函数的全增量能表示为

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad (2.7.2)$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, 而 $o(\rho)$ 是 ρ 的高阶无穷小, A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在 P_0 可微, 并称式 (2.7.2) 中的 $A\Delta x + B\Delta y \equiv A dx + B dy$ 为函数在点 P_0 的全微分, 记为 dz .

若函数 $z = f(x, y)$ 在 G 的每一点可微, 则称函数在 D_f 可微, 称

$$dz = A dx + B dy \quad (2.7.3)$$

为函数 $z = f(x, y)$ 的全微分.

式(2.7.2)表明,当函数在区域 G 可微时,其全微分 $dz = A dx + B dy$ 恰好是函数增量 Δz 关于自变量增量 $\Delta x \equiv dx$ 与 $\Delta y \equiv dy$ 的线性部分,这一点与一元情形相同.

定理 2.7.3 (可微与连续的关系) 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在 $P_0 \in G$ 可微,则

(1) $z = f(x, y)$ 在 P_0 连续,

(2) $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, B = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$.

若二元函数 $z = f(x, y)$ 在区域 G 中可微,则

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (2.7.4)$$

本定理的证明由可微与连续的定义得到.

二元函数 $z = f(x, y)$ 的可微性有其几何意义.

如同在一元函数时定义曲线的切线那样,可定义曲面的切平面.

定义 2.7.9 (曲面的切平面) 设函数 $z = f(x, y)$ 定义在区域 $G \subset \mathbf{R}^2$ 上,其几何图像是 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面 Σ

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in G\}.$$

对于点 $P_0(x_0, y_0) \in G$,如果通过 P_0 且在 Σ 上的所有曲线都有切线,而这些切线都在同一个平面 π 上,则称此平面 π 为 Σ 在点 P_0 的切平面.

我们有定理

定理 2.7.4 (切平面存在的充要条件) 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在区域 G 中定义,则相应的曲面 Σ 在点 $P_0(x_0, y_0) \in G$ 处有切平面的充要条件是: $z = f(x, y)$ 在 P_0 可微.此时,切平面 π 的方程是

$$z - z_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0). \quad (2.7.5)$$

在多元函数情形,还有一种很有用的变化率,就是函数沿某个给定方向的变化率,称为方向导数.我们以三元函数为例.

定义 2.7.10 (三元函数的方向导数) 设函数 $u = f(x, y, z)$ 定义在空间区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 上,并设 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. 给定一个单位向量

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = \cos \alpha e_1 + \cos \beta e_2 + \cos \gamma e_3.$$

如果极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2, z_0 + ha_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

存在且有限,则称它为函数 $u = f(x, y, z)$ 通过点 P_0 沿单位向量 $\mathbf{a}$ 的方向导数,记为 $\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right|_{P_0}$.

定理 2.7.5 (方向导数与可微性的关系) 设三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在区域 $\Omega \in \mathbb{R}^3$ 中可微,则沿单位向量 $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 的方向导数等于

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2.7.6)$$

此定理的证明可由方向导数与可微的定义得到.

方向导数随单位向量 $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 而改变.公式(2.7.6)可改写为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{G} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{G}| \cdot \cos \theta, \quad (2.7.7)$$

其中 $\mathbf{G} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$, θ 为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{G}$ 的夹角.

公式(2.7.7)有一个明显的意义:当 $\theta = 0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}$ 达到最大值,也就是,把 $\mathbf{G}$ 看作一个向量,它的方向 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ 是函数 $u = f(x, y, z)$ 变化率最大的方向,而 $|\mathbf{G}|$ 便是最大变化率的值.

定义 2.7.11 (梯度) 我们称 $\mathbf{G}$ 为函数 $u = f(x, y, z)$ 的梯度,并记为 $\text{grad } f$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

引用记号 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, 称为奈布拉(Nabla)算符,则梯度可记为

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f.$$

与梯度同样重要的另外两个量,散度 $\text{div } \mathbf{A}$ 与旋度 $\text{rot } \mathbf{A}$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad \text{与} \quad \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A},$$

其中 $\mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, 将在 § 3.5.3 作详细介绍.

例 8 位于原点 O 的点电荷 q 在空间中任一点 $M(x, y, z)$ 产生的电位是 $v = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$, ϵ 为介电系数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 求电位 v 的梯度.

解 令 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 由梯度公式

$$\text{grad } v = \text{grad } \frac{q}{4\pi\epsilon r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \text{grad } r,$$

再由 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$, 故 $\text{grad } r = \frac{1}{r}(x, y, z)$, 最后得

$$\text{grad } v = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{1}{r}(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r}.$$

2.7.6 多元函数的复合

多元函数的复合与其求导数法则是建立在一元函数求导的链式法则基础上的, 只是情况较为复杂, 故我们进行专门讨论.

第一种情形 $z = f(u, v)$ 与 $u = g(x)$ 、 $v = h(x)$ 复合得 $z = f(g(x), h(x))$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

对于 $z = f(u, v)$, 由式(2.7.3), $dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$, 于是

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (2.7.8)$$

但因 $u = g(x)$ 、 $v = h(x)$, 故 $\frac{du}{dx} = g'_x$, $\frac{dv}{dx} = h'_x$, 最后有

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} g'_x + \frac{\partial f}{\partial v} h'_x.$$

第二种情形 $z = f(u, v)$ 与 $u = g(x, y)$ 、 $v = h(x, y)$ 复合得 $z = f(g(x, y), h(x, y))$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 、 dz .

对于 $z = f(u, v)$, 由式(2.7.3), $dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$, 但因 $u = g(x, y)$ 、 $v = h(x, y)$, 故

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

最后有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.7.9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.7.10)$$

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy. \quad (2.7.11)$$

第三种情形 $z = f(u, v)$ 与 $u = g(x, y, t)$ 、 $v = h(x, y, t)$ 复合得 $z = f(g(x, y, t), h(x, y, t))$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 、 dz .

对于 $z = f(u, v)$, 由 $dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$, 并因 u 是 x, y, t 的函数, 故

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial t}dt, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial t}dt,$$

最后有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.7.12)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.7.13)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (2.7.14)$$

$$\begin{aligned} dz = & \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt. \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

上面的公式可推广到一般情形.

第四种情形 $z = f(u, v)$ 与 $u = g(x_1, x_2, \dots, x_n), v = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$

复合得 $z = f(g(x_1, x_2, \dots, x_n), h(x_1, x_2, \dots, x_n))$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, dz$.

最一般情形 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$ 与 $u_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), u_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 复合得 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, dz$.

我们不再写出后面两种情形的公式, 请读者自己练习.

例 9 设 $z = f(u, v) = e^{6u-2v}$, 而 $u = \sin x, v = x^3$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

解 由公式(2.2.7)

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= e^{6u-2v} \cdot 6 \cos x + e^{6u-2v} \cdot (-2) \cdot 3x^2 \\ &= 6(\cos x - x^2) \exp\{6 \sin x - 2x^3\}. \end{aligned}$$

例 10 设 $z = f(u, v)$, 而 $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$. 若 f 有连续偏导数, 试证:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2.$$

证 求

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta,$$

所以

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right)^2 + \left(-r \frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

例 11 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 试证: $u = \frac{1}{r}$ 满足

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

证 对 x 求偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

及对 y, z 类似的偏导数, 得

$$\Delta u = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} = 0.$$

例 12 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ 确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 利用隐函数求导法则, 对方程关于 x 求导, 得:

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 4 \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

再对 x 求导, 得

$$2 + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

解出得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2-z} + \frac{x^2}{(2-z)^2}.$$

类似地得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2-z} + \frac{y^2}{(2-z)^2}.$$

最后, 我们用奈布拉符号表示函数 $z = f(x, y)$ 的高阶导数

$$d^n z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y), n \in \mathbf{N}.$$

当 $n=2$ 时, 得到 $d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$.

2.7.7 应用

1. 空间曲线的切线与法平面

定义 2.7.12 (简单连续曲线) 设空间曲线 Γ 的参数式为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b, \quad (2.7.16)$$

如果 φ, ψ, ω 为连续函数, 且没有重点, 即 Γ 的每一点仅由一个参数 t 得到, 则称曲线 Γ 为简单连续曲线, 简称简单曲线.

定义 2.7.13 (空间简单连续曲线的切线与法平面) 当简单连续曲线 Γ 上的动点 $P(x, y, z) = P(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ 沿 Γ 趋向于 Γ 上的定点 $P_0(x_0, y_0, z_0) = P(\varphi(t_0), \psi(t_0), \omega(t_0))$ 时, 割线 PP_0 有惟一确定的极限位置 T , 则称 T 为 Γ 在 P_0 点的切线. 经过 P_0 点并垂直于 P_0 点的切线的平面, 称为 Γ 的过 P_0 点的法平面.

定理 2.7.6 (光滑曲线的切线方程) 设简单连续曲线 Γ 满足: $\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t)$ 连续且不同时为 0 称 Γ 为光滑曲线, 则 Γ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ 的切线 T 的方程为

$$\frac{x - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - \psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{z - \omega(t_0)}{\omega'(t_0)}. \quad (2.7.17)$$

证 取 $P, P_0 \in \Gamma$, 设 Γ 上的割线 PP_0 与切线 T 的方向分别为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 与 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 按定义有 $\lim_{t \rightarrow t_0} \beta_1 = \alpha_1, \lim_{t \rightarrow t_0} \beta_2 = \alpha_2, \lim_{t \rightarrow t_0} \beta_3 = \alpha_3$. 于是, PP_0 的方程为

$$\frac{x - x_0}{\beta_1} = \frac{y - y_0}{\beta_2} = \frac{z - z_0}{\beta_3}.$$

用参数表示

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{\beta_1} = \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{\beta_2} = \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{\beta_3},$$

在上式中除以 $t - t_0$, 并令 $t \rightarrow t_0$, 得

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}}{\beta_1} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0}}{\beta_2} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{t - t_0}}{\beta_3}.$$

由 φ, ψ, ω 的可微性得

$$\frac{\varphi'(t_0)}{\alpha_1} = \frac{\psi'(t_0)}{\alpha_2} = \frac{\omega'(t_0)}{\alpha_3},$$

这说明 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 与 $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$ 对应成比例, 于是得切线 T 的方程(2.7.17).

请读者自行推导 Γ 在 P_0 点的法平面方程.

2. 空间曲面的切平面与法线

在 §2.7.5 中定义了空间曲面 Σ 的切平面(定义 2.7.9). 当曲面用显式 $z = f(x, y)$ 表示时, 还给出了通过点 $P_0 \in \Sigma$ 切平面的方程(2.7.5):

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0).$$

本小节中, 要在曲面由一般式、参数式表示时推导切平面的方程.

(1) 曲面 Σ 由一般式表示:

$$F(x, y, z) = 0, \quad (2.7.18)$$

通过 Σ 上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, 任意作一曲线 $\Gamma \in \Sigma$, 并假设 Γ 的方程用参数式

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

表示(见(2.7.16)式), 于是 P_0 的参数坐标为 $P(\varphi(t_0), \psi(t_0), \omega(t_0))$, 而 Γ 的切线方向为 $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$.

另一方面, 由于 $\Gamma \in \Sigma$, 故

$$F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) = 0,$$

对 t 求导数

$$F'_x \varphi'(t) + F'_y \psi'(t) + F'_z \omega'(t) = 0,$$

从而, 向量 $(\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t))$ 与 (F'_x, F'_y, F'_z) 相互垂直, 后者恰好是 F 的梯度 $\text{grad } F$. 我们称 $\text{grad } F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ 为曲面 Σ 在点 P 的法方向. 法方向垂直于过点 P 的切平面 π . 于是, 有如下定理.

定理 2.7.7 (曲面的切平面) 设曲面 Σ 由一般式 $F(x, y, z) = 0$ 给出, 并设 $\text{grad } F = (F'_x, F'_y, F'_z) \neq 0$, 则通过点 $P_0 \in \Sigma$ 的切平面 π 的方程为:

$$F'_x|_{P_0} (x - x_0) + F'_y|_{P_0} (y - y_0) + F'_z|_{P_0} (z - z_0) = 0. \quad (2.7.19)$$

此时, 通过点 $P_0 \in \Sigma$ 且垂直于切平面 π 的直线称为点 P_0 的法线, 其方程为:

$$\frac{x - x_0}{F'_x|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{F'_y|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{F'_z|_{P_0}}. \quad (2.7.20)$$

这里我们再强调以下梯度的意义:如果把 $F(x, y, z) = 0$ 看作空间中的曲面, 则梯度 $\text{grad } F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ 是曲面的法向量, 而 $F(x, y, z)$ 的所有方向导数中, 沿法方向的方向导数的值最大.

(2) 曲面 Σ 由参数式表示:

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ z = h(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D, \quad (2.7.21)$$

D 为 uv 平面上的区域, 参数 u, v 独立变化.

当 $u = u_0$ 固定时, 参数式 (2.7.21) 代表一条曲线, 称它为 u -曲线, 其上的任一点的向量表示为参数形式:

$$\mathbf{r} = (f(u_0, v), g(u_0, v), h(u_0, v)). \quad (2.7.22)$$

同理, 可定义 Σ 上的 v 曲线: $\mathbf{r} = (f(u, v_0), g(u, v_0), h(u, v_0))$.

u -曲线与 v -曲线的切线方向分别为:

$$\mathbf{r}_v = (f'_v(u_0, v), g'_v(u_0, v), h'_v(u_0, v)),$$

$$\mathbf{r}_u = (f'_u(u, v_0), g'_u(u, v_0), h'_u(u, v_0)).$$

由于 u -曲线与 v -曲线都在 Σ 上, 而 $\mathbf{r}_v$ 与 $\mathbf{r}_u$ 都在切平面 π 上, 故 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 是 π 的法方向.

定理 2.7.8 (曲面切平面的点法式) 设曲面 Σ 由参数式 (2.7.21) 给出, 并设 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$, 则通过点 $P_0(u_0, v_0) \in \Sigma$ 的切平面 π 的点法式方程为:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|_{P_0} \cdot (\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)) = 0. \quad (2.7.23)$$

例 13 令

$$\begin{cases} E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = (\mathbf{r}_u)^2, \\ F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_u, \\ G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = (\mathbf{r}_v)^2, \end{cases}$$

便可将 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 的长度表示成:

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

3. 极值问题

多元函数的极值和最值定义与一元情形类似. 只要注意到, 极值是与某一点的一个邻域中的函数值相比较, 而最值是与函数的整个定义域中的函数值相比较.

对于函数 $z = f(x, y)$, 极值的嫌疑点有:

① 使 $f'_x = 0, f'_y = 0$ 的 $(x, y) \in D_f$,

② f'_x, f'_y 不存在的 $(x, y) \in D_f$,

③ D_f 的边界点 $(x, y) \in \partial D_f$.

关于极值点的判别法,有:

定理 2.7.9 (极值的充分条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在极值嫌疑点 P_0 的邻域 $B_\delta(P_0) \subset D_f$ 内有二阶连续偏导数. 令

$$D(x, y) \equiv (f''_{xy})^2 - (f''_{xx})(f''_{yy}) = - \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}. \quad (2.7.24)$$

(i) 若 $D(x_0, y_0) < 0$, 且 $f''_{xx}|_{P_0} < 0$, 则 P_0 为极大值点,

(ii) 若 $D(x_0, y_0) < 0$, 且 $f''_{xx}|_{P_0} > 0$, 则 P_0 为极小值点,

(iii) 若 $D(x_0, y_0) > 0$, 则 P_0 不是极值点,

(iv) 若 $D(x_0, y_0) = 0$, 则 P_0 可能是极值点, 也可能不是极值点.

式(2.7.24)中的 $-D(x, y)$ 称为函数 f'_x 与 f'_y 的雅可比(C. G. Jacobi)行列式.

例 14 函数 $z = 3 - x^2 + 2x - y^2 - 4y$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 都提供了应用定理 2.7.8 的例子.

4. 条件极值问题

多元函数的极值问题在应用中经常遇到, 有一种情形称为条件极值(为与条件极值区别, 我们称上一小节中的极值为无条件极值).

例如, 要求空间一个定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到给定曲线 $\Gamma: \begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$

的距离, 就是要计算

$$f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

的极小值, 但函数 $f(x, y, z)$ 中的 (x, y, z) 是要受到 Γ 的限制的; 这就是条件极值问题. 我们以二元情形为例.

典型问题: 求在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 之下, 函数 $z = f(x, y)$ 的极值点与极值.

解决此类问题的办法是用拉格朗日乘数法将条件极值化为无条件极值.

引入辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, 其中 λ 称为 L -乘子, 把 x, y, λ 看作自变量, 问题成为求函数 $F(x, y, \lambda)$ 的无条件极值.

按无条件极值的求法, 由下面的方程组

$$\begin{cases} 0 = F'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y), \\ 0 = F'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y), \\ 0 = F'_\lambda(x, y, \lambda) = \varphi(x, y), \end{cases}$$

求出相应解 (x, y, λ) 作为极值嫌疑点, 便可得到条件极值问题的解.

例 15 求椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域内嵌入一个具

有最大体积的内接长方体.

解 设内接长方体的一个顶点 $P(x, y, z)$ 在第一卦限中, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 因图形是对称的, 可设其长 $= 2x$ 、宽 $= 2y$ 、高 $= 1 - z$.

内接长方体的体积为 $V = 4xy(1 - z)$, 约束条件为

$$\varphi(x, y, z) = z - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

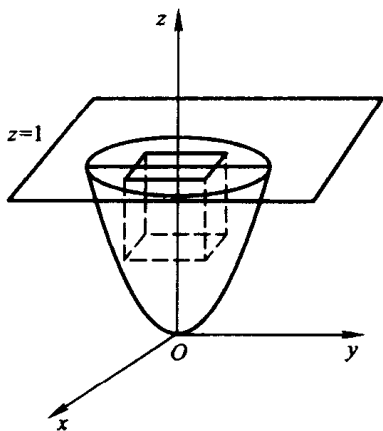


图 2.7.3

定义辅助函数

$$F(x, y, z, \lambda) = 4xy(1 - z) + \lambda \left(z - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

求 $F(x, y, z, \lambda)$ 的极值嫌疑点:

$$\begin{cases} F'_x = 4y(1 - z) - 2\lambda x \frac{1}{a^2} = 0 \\ F'_y = 4x(1 - z) - 2\lambda y \frac{1}{b^2} = 0 \\ F'_z = -4xy + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = z - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \end{cases}$$

解上面方程组, 得惟一的解 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1}{2}, ab \right)$, 它是惟一的极值嫌疑点. 经验证, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 就是最大值点, 而 $V = \frac{ab}{2}$ 正是最大内接长方体的体积 (如图 2.7.3).

习 题

1. 构造下列函数定义域的图形

$$(1) f(x, y) = 3 - 2x - 4y$$

$$(2) f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 1$$

$$(3) f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

2. 试求下列函数的定义域

$$(1) f(x, y) = \sqrt{\ln(4 - x^2 - y^2)}$$

$$(2) z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arccos(1 - y)$$

$$(3) f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{2x - x^2 - y^2}}$$

3. 已知 $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2$, 试求

$$(1) f(-2, 3); \quad (2) f\left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}\right); \quad (3) f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

4. 试求下列函数的极限

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x}$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$(5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$(6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$5. \text{ 试求 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases} \text{ 在点 } (0, 0) \text{ 关于 } x \text{ 与 } y \text{ 的偏导数.}$$

6. 求下列函数的偏导数

$$(1) z = \arctan \frac{y}{x}.$$

$$(2) f(x, y) = \frac{1}{r}, \text{ 这里 } r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, x_0, y_0 \text{ 为常数.}$$

$$(3) z = \sqrt{x} + \sin(xy), \text{ 在点 } (1, \pi) \text{ 处.}$$

$$(4) f(x, y) = x \sin y + ye^{xy}.$$

$$7. \text{ 设 } f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ x^2 + y^2, & x = 0 \text{ 或 } y = 0. \end{cases} \text{ 试求 } f'_x(0, 0) \text{ 与 } f'_y(0, 0). \text{ 问 } f(x, y) \text{ 在点}$$

$(0, 0)$ 处是否连续.

$$8. \text{ 若 } u = z \arctan \frac{x}{y}, \text{ 试求 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ 之值.}$$

9. 试求下列函数的高阶导数

$$(1) \text{ 设 } z = x^3 y^4 - 3x^2 y^3 - x^2 y + 9, \text{ 求二阶偏导数;}$$

$$(2) \text{ 设 } z = \ln(x^2 + y^2), \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ 之值;}$$

$$(3) \text{ 设 } z = x \ln(xy), \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

(4) 设 $u = xe^{xy}$, 求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

10. 写出二元函数相应的中间值定理、有界性定理、最大值与最小值定理与一致连续性定理.

11. 计算 $z = x^2 y^3 + x^3 y^2$ 在点 $(2, 1)$ 的全微分.

12. 求下列函数的全微分

(1) $z = \sin^2 x + \cos^2 y$ (2) $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$

13. 计算 $(1.04)^{1.98}$ 的近似值.

14. 利用一阶全微分形式的不变性, 计算 $z = e^{xy} \sin(x+y)$ 的偏导数.

15. 设 $z = x^2 e^y$, $x = \sin t$, $y = t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

16. 设 $z = x \ln y$, $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial v}$.

17. 设 $w = x \cos(yz^2)$, $x = \sin t$, $y = t^2$, $z = e^t$, 求 $\frac{dw}{dt}$.

18. 设 $w = \sqrt{x} + y^2 z^3$, $x = 1 + u^2 + v^2$, $y = uv$, $z = 3u$, 求 $\frac{\partial w}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial v}$.

19. 求下列函数对每一个自变量的偏导数

(1) $z = \frac{1}{x^2 - y^2} \cos \frac{y}{x}$.

(2) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}$.

(3) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

20. 设 $z = f(u-v, v-u)$, 试证 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

21. 设 $u = f(x, xy, xyz)$, 计算 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

22. 设 $z = f\left(\frac{y}{x}, xy\right)$, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

23. 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

24. 试求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 所确定的 $z = z(x, y)$ 有关偏导数 $(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y}$ 之值.

25. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = f\left(\frac{y-nz}{x-mz}\right)$ 所确定, 试求 $(x-mz) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-nz) \frac{\partial z}{\partial y}$ 之值.

26. 设 $f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$, 求 $\frac{\partial f}{\partial a}$.

27. 设 $f(x, y, z) = xe^{y^2 z}$, $a = e_1 - e_2 + \sqrt{2}e_3$, 试求 $\frac{\partial f}{\partial a} \Big|_{(2,1,0)}$.

28. 试求 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处, 沿 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ 方向的方向导数.
29. 设 $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 试求 $\text{grad } f(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -3)$.
30. 函数 $u = xyz$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处沿什么方向的方向导数取最大值? 并求此最大值.
31. 设 $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{a}$ 为常向量, $f(r)$ 为一次可微函数, 试求
- (1) ∇r ; (2) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$; (3) $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$; (4) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$; (5) $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$;
- (6) $\nabla \cdot (r^3 \mathbf{a})$; (7) $\nabla \times (r^2 \mathbf{a})$; (8) $\text{rot}(f(r)\mathbf{r})$; (9) $\text{div}\left(f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$; (10) $\text{rot}\left(f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$.
32. 设 $\mathbf{A} = \{x^2 - 2yz, y^2 - 2zx, z^2 - 2xy\}$, 试求 (1) $\nabla \cdot \mathbf{A}$; (2) $\nabla \times \mathbf{A}$; (3) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$.
33. 设 $\mathbf{A} = xy^2z^2\mathbf{e}_1 + z^2\sin y\mathbf{e}_2 + x^2e^y\mathbf{e}_3$, 试求 $\text{rot } \mathbf{A}$.
34. 试证下列各式
- (1) $\text{grad}(uv) = u\text{grad } v + v\text{grad } u$
- (2) $\text{grad } f(u) = f'(u)\text{grad } u$
- (3) $\text{div}(u\mathbf{A}) = u\text{div } \mathbf{A} + (\text{grad } u) \cdot \mathbf{A}$
- (4) $\text{rot}(u\mathbf{A}) = u\text{rot } \mathbf{A} + (\text{grad } u) \times \mathbf{A}$
- (5) $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$
- (6) $\text{rot}(\text{grad } u) = \mathbf{0}$
- (7) $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$
35. 试求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin \frac{t}{2}$, 在点 $\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处的切线及法平面的方程.
36. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求一点, 使此点处切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.
37. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线在点 $(0, 1, -1)$ 处的切线与法平面的方程.
38. 求椭圆抛物面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(2, 1, 5)$ 处的切平面与法线的方程.
39. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面的方程.
40. 试求曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{z}$ 上任意一点处切平面在各坐标轴上截距之和.
41. 试证曲面 $xyz = a^2 (a > 0)$ 上任意一点处的切平面与三个坐标平面所围成的四面体的体积为一定值.
42. 试求下列函数的极值
- (1) $f(x, y) = -x^3 + y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9y$
- (2) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$
- (3) $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$
- (4) $f(x, y) = e^{2y}(x^2 + 2x + y)$
- (5) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$
43. 在 $0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi$ 内, 求函数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ 的极值.
44. 求函数 $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ 在区域 $4x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值.

-
45. 求函数 $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$ 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 16$ 上的最大值与最小值.
46. 求函数 $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$ 在圆 $x^2 + y^2 \leq 16$ 上的最大值与最小值.
47. 设 $V = xyz, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 试求满足约束条件 $2x + 2y + z = 84$ 的最大值.
48. 求函数 $z = 6 - 4x - 3y$ 满足约束条件 $x^2 + y^2 = 1$ 的极值.
49. 在旋转椭球面 $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ 上, 求距平面 $3x + 4y + 12z = 288$ 的最近与最远的点.

第三章 积 分

——函数的分析与研究 II

第二章介绍了经典微积分的第一个主要内容:导数与微分.本章致力于经典微积分的第二个主要内容:积分. § 3.1 从求面积问题引入黎曼积分; § 3.2 介绍黎曼积分的计算,并且从微分逆运算的角度引入不定积分的概念,从牛顿-莱布尼茨公式出发介绍黎曼积分与不定积分的关系以及计算积分的几个重要方法; § 3.3~ § 3.5 是从积分区间的角度推广黎曼积分到多重积分、线积分与面积分,并讨论了这些积分之间的关系,以及它们在几何与物理上的应用; § 3.6 考虑当黎曼积分的积分区间为无穷或函数为无界的情形,即反常积分,以及被积函数含参变量时情形,即含参量的积分; § 3.7 讨论复变函数的微积分;最后, § 3.8 是对黎曼积分更深一步的推广——勒贝格积分的简单介绍.

§ 3.1 积分定义

中学数学教程中介绍了正方形、矩形、梯形、圆等图形面积的求法,但都是一些规则的图形.当图形的边界稍微复杂一点,就会束手无策.高等数学的任务之一,就是要解决求一般图形的面积问题.现在来看下面的例子.

设 $y = f(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 连续.考虑由曲线 $y = f(x)$ 、 Ox 轴、直线 $x = a$ 、 $x = b$ 围成的图形,称之为曲边梯形 $ABCD$ (图 3.1.1).求此曲边梯形的面积 S .

解决的思路是:把曲边梯形 $ABCD$ 分为许多小曲边梯形,设法求出这些小曲边梯形的面积的近似值,求小曲边梯形面积的和,然后让小曲边梯形的个数无限增加,在“极限”情形,就是曲边梯形 $ABCD$ 的面积.

分为以下 4 步解决.

第一步 任作区间 $[a, b]$ 的一个“分法 r ”

“分法 r ”是指:一组实数 $x_0, x_1, \dots, x_n$,

满足

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b,$$

称 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为分法 r 的分点.记

$$\lambda = \max \{ (x_{i+1} - x_i) : i = 0, 1, \dots, n-1 \},$$

称 λ 为分法 r 的模或步长,并记 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

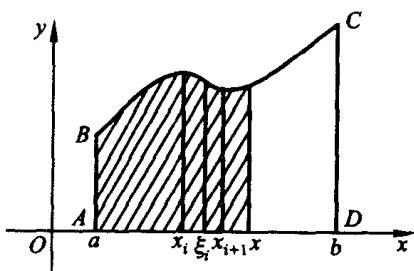


图 3.1.1

第二步 过分法 r 的每个分点 $x_i (i=0, 1, \dots, n-1)$, 作 Oy 轴的平行线, 将曲边梯形 $ABCD$ 分为 n 个小曲边梯形, 在每个小曲边梯形的底边 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任取一点 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, 以 $f(\xi_i)$ 为高, 作 n 个小矩形:

$$D_i: \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x_i \leq x \leq x_{i+1}, 0 \leq y \leq f(\xi_i)\};$$

D_i 的面积为 $\sigma_i = f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i) \Delta x_i \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$.

第三步 由分法 r 所得的 n 个小曲边梯形 $S_i \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 为:

$$S_i: \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x_i \leq x \leq x_{i+1}, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

以小矩形 D_i 的面积 σ_i 近似地代替小曲边梯形 S_i 的面积, 求和后得到曲边梯形 $ABCD$ 面积 S 的近似值:

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

第四步 曲边梯形 $ABCD$ 面积 S 则应当是:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

上面的步骤启发我们解决所有类似的问题——“求积问题”.

定义 3.1.1 (黎曼 (G. F. Riemann) 积分) 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, r 为 $[a, b]$ 的一个分法

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b, \quad (3.1.1)$$

称 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为 r 的分点. 记

$$\lambda = \{\max(x_{i+1} - x_i) : i=0, 1, 2, \dots, n-1\}, \quad (3.1.2)$$

称 λ 为分法 r 的模或步长, 并记 $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$. 任取一点 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, 2, \dots, n-1$. 作和

$$\sigma \equiv \sigma(r, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (3.1.3)$$

这里 $\sigma(r, \xi)$ 表示 σ 与分法 r, ξ_i 有关, 称 σ 为黎曼和, 或积分和.

如果有某个常数 I , 满足: 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任意分法 r (3.1.1) 与任意选取的 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, n-1$, 只要 $\lambda < \delta$, 恒有

$$|\sigma - I| < \epsilon, \quad (3.1.4)$$

则称 $\lambda \rightarrow 0$ 时, σ 以 I 为极限, 记为

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (3.1.5)$$

此时, 称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积 (简称 R -可积), 称 I 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼积分 (简称 R -积分). 在不发生混淆时, 称 $f(x)$ 可积, 称 I 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.1.6)$$

分别称 a, b 为定积分的下限与上限, x 为积分变量, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)dx$ 为被积表达式, 记号 $\int$ 称为积分符号.

注 1 求黎曼积分的过程, 就是一个“细分取近似、求和取极限”的过程.

注 2 (3.1.5) 式所表达的极限, 与第 2 章所定义的极限, 两者的相同点是: 都可用 $\varepsilon - \delta$ 语言表达. 其不同之点是: (3.1.5) 式中极限过程 $\lim$ 是对任意的分法 r 、任意选取的 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时而取的.

注 3 (3.1.5) 式所表达的极限值 I 是一个常数, 与分法 r 、点 ξ 的选取无关, 也与我们使用什么作为自变量没有关系, 因此

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f(t) dt, \quad \int_a^b f(u) du$$

都代表同一个值 I .

注 4 如果 $b < a$, 我们约定

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (3.1.7)$$

注 5 用定义 3.1.1 来表示例子中曲边梯形 $ABCD$ 的面积, 我们有

$$S = \int_a^b f(t) dt.$$

任取一点 $x \in [a, b]$, 过 x 作 $D'C' \parallel AB$, 让线段 $C'D'$ 平行移动, 得曲边梯形 $ABC'D'$ (图 3.1.2), 则其面积为

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (3.1.8)$$

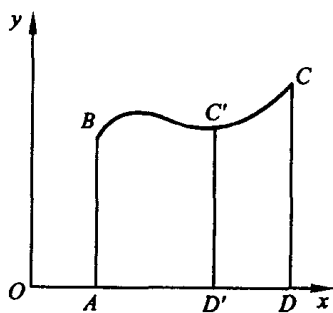


图 3.1.2

现在研究函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的条件, 我们讨论 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中有界的情形. 由 $f(x)$ 的有界性

$$m = \inf\{f(x): x \in [a, b]\} \leq \sup\{f(x): x \in [a, b]\} = M.$$

对于取定的一个分法 r , 由 (3.1.1) 式表示. 令

$$M_i = \sup\{f(x): x \in [x_i, x_{i+1}]\}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$m_i = \inf\{f(x): x \in [x_i, x_{i+1}]\}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

作两个新和

$$\sigma_{\sup} \equiv \sigma_{\sup}(r) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \quad \sigma_{\inf} \equiv \sigma_{\inf}(r) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad (3.1.9)$$

分别称 $\sigma_{\sup}$ 与 $\sigma_{\inf}$ 为达布(J. Darboux)上和与达布下和, 它们仅与分法 r 有关. 与

(3.1.3)式中的黎曼和 $\sigma = \sigma(r, \xi)$ (与分割 r 以及 ξ_i 的选取两者都有关) 相比较, 显然有

$$\sigma_{\inf}(r) \leq \sigma(r, \xi) \leq \sigma_{\sup}(r). \quad (3.1.10)$$

定理 3.1.1 (有界函数黎曼可积的充要条件) 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数. 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 当且仅当

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\sigma_{\sup} - \sigma_{\inf}) = 0. \quad (3.1.11)$$

证 为证明定理, 分以下步骤.

1. 首先证明: 对于同一个分法 r , 达布上和与达布下和满足下面的等式

$$\sigma_{\sup}(r) = \sup \{ \sigma(r, \xi) : \xi \}, \quad \sigma_{\inf}(r) = \inf \{ \sigma(r, \xi) : \xi \},$$

也就是要证明

$$\sigma_{\sup} = \sup \left\{ \sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i : \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], 0 \leq i \leq n-1 \right\}, \quad (3.1.12)$$

$$\sigma_{\inf} = \inf \left\{ \sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i : \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], 0 \leq i \leq n-1 \right\}. \quad (3.1.13)$$

事实上, 因 M_i 是 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的上确界, 故由上确界的特征性质, 对每个 $i=0, 1, \dots, n-1$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, 使得 $f(\eta_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$. 于是,

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i) \Delta x_i > \sum_{i=0}^{n-1} \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i = \sigma_{\sup} - \varepsilon. \quad (3.1.14)$$

由(3.1.10)与(3.1.14)得: $\sigma_{\sup} = \sup \sigma$, 即(3.1.12)成立. 同理 $\sigma_{\inf} = \inf \sigma$, 即(3.1.13)成立.

2. 证明: 对于不同的分法 r_1, r_2 , 分点增加时, 达布上和不增、达布下和不减. 亦即要证: 若 r_2 的分点是由 r_1 的分点增加得到的, 则

$$\sigma_{\sup}(r_2) \leq \sigma_{\sup}(r_1), \quad \sigma_{\inf}(r_2) \geq \sigma_{\inf}(r_1). \quad (3.1.15)$$

事实上, 只要对 r_2 比 r_1 多一个分点的情形证明就够了. 设

$$r_1: x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n,$$

$$r_2: x_0 < x_1 < \dots < x_i < \bar{x} < x_{i+1} < \dots < x_n,$$

我们只证明(3.1.15)式中的第一个不等式, 第二个不等式可同样证明.

由于 $[x_i, \bar{x}] \cup [\bar{x}, x_{i+1}] \subset [x_i, x_{i+1}]$, 令

$$\bar{M}_i = \sup \{ f(x) : x \in [x_i, \bar{x}] \}, \quad \bar{M}_{i+1} = \sup \{ f(x) : x \in [\bar{x}, x_{i+1}] \},$$

$$\Delta \bar{x}_i = \bar{x} - x_i, \quad \Delta \bar{x}_{i+1} = x_{i+1} - \bar{x}.$$

因为 $\bar{M}_i \leq M_i, \bar{M}_{i+1} \leq M_{i+1}$, 于是

$$\bar{M}_i \Delta \bar{x}_i + \bar{M}_{i+1} \Delta \bar{x}_{i+1} \leq M_i (\Delta \bar{x}_i + \Delta \bar{x}_{i+1}) = M_i \Delta x_i,$$

上式的左边两项与右边一项分别位于分法 r_2 与 r_1 之中, $\sigma_{\sup}(r_2)$ 与 $\sigma_{\sup}(r_1)$ 的其他项都是一样的, 因此(3.1.15)式的第一个不等式成立. 另一个关于下和的不等式可同样证明.

3. 证明: 对于任意两个分法(相同或不同) r_1, r_2 , 达布上和总大于达布下和. 亦即要证:

$$\sigma_{\inf}(r_1) \leq \sigma_{\sup}(r_2). \quad (3.1.16)$$

事实上, 若两个分割相同, 由(3.1.10)式即得. 现在证明, 当两个分法不同时, (3.1.16)式成立.

我们将分法 r_2 的分点与 r_1 的分点合并, 组成一个新的分法, 记为 r_3 . 因此, 由(3.1.15)、(3.1.10)得

$$\sigma_{\inf}(r_1) \leq \sigma_{\inf}(r_3) \leq \sigma_{\sup}(r_3) \leq \sigma_{\sup}(r_2).$$

从而(3.1.16)得证.

4. 证明: 定理 3.1.1 的结论.

必要性 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, $\int_a^b f(x) dx = I$. 于是, 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对任意分法 r 与任意选取的点 ξ , 只要 $\lambda < \delta$, 必有 $|\sigma - I| < \epsilon$. 亦即

$$I - \epsilon < \sigma < I + \epsilon.$$

在上式中, 据 σ 对 r, ξ 的依从关系, 对于一个分法 r 与 ξ 的一种选法, 我们有

$$I - \epsilon < \sigma_{\inf}(r) \leq \sigma(r, \xi) \leq \sigma_{\sup}(r) < I + \epsilon,$$

这正表明: 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\lambda < \delta$, 恒有 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\sigma_{\sup}(r) - \sigma_{\inf}(r)) = 0$. 必要性得证.

充分性 假设(3.1.11)式成立. 由第3步的结论知, 不等式(3.1.16)

$$\sigma_{\inf}(r_1) \leq \sigma_{\sup}(r_2)$$

成立. 因此, 我们可令

$I_* = \sup \{ \sigma_{\inf}(r) : \text{对所有分法 } r \}, \quad I^* = \inf \{ \sigma_{\sup}(r) : \text{对所有分法 } r \}$, 于是

$$\sigma_{\inf}(r) \leq I_* \leq I^* \leq \sigma_{\sup}(r),$$

再由充分性假设推出 $I_* = I^*$, 这个公共值记为 $I = I_* = I^*$.

结合 $\sigma_{\inf}(r) \leq I \leq \sigma_{\sup}(r)$ 与 $\sigma_{\inf}(r) \leq \sigma \leq \sigma_{\sup}(r)$, 立即得到

$$|\sigma - I| < \epsilon,$$

充分性得证.

注 我们称 $\omega_i = M_i - m_i$ 为 $f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅. 于是,

$$\sigma_{\sup} - \sigma_{\inf} = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

这样, 定理 3.1.1 可叙述为:

有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 当且仅当

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

例 1 利用黎曼和 σ , 计算黎曼积分 $\int_0^1 a^x dx, a > 0, a \neq 1$.

解 因为 a^x 在 $[0, 1]$ 上连续, (3.1.11) 必成立, 故 R -可积, 所以为求其黎曼积分的值, 只要取一个便于计算的分法 r : 把 $[0, 1]$ 分为 n 等分, 因此 $\lambda(r) = \Delta x_i = \frac{1}{n}$; ξ 也可取为小区间的左端点 $\xi_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1$. 作黎曼和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} a^{\frac{i}{n}} \frac{1}{n},$$

从而

$$\begin{aligned} \int_0^1 a^x dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} a^{\frac{i}{n}} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a^{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{1 - a^{\frac{1}{n}}}{1 - a^{\frac{1}{n}}} \\ &= (a - 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1 - a^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n}}} = \frac{a - 1}{\ln a}. \end{aligned}$$

§ 3.2 积分性质与计算

本节讲述黎曼积分的性质、运算法则, 并且从微分逆运算的角度引入不定积分及其运算.

3.2.1 定积分的性质, 牛顿-莱布尼茨公式

首先, 从定理 3.1.1 可得到下列三类函数的黎曼可积性.

定理 3.2.1 (黎曼可积函数类) 下列三类函数在区间 $[a, b]$ 上黎曼可积:

- (i) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,
- (ii) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 并且只有有限多个不连续点(间断点),
- (iii) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调、有界.

以下为叙述简练, 如无混淆, 我们简称黎曼积分为定积分, 称 $f(x)$ 黎曼可积为可积.

定理 3.2.2(定积分的性质) 定积分有如下性质:

$$(i) \int_a^b 1 dx = b - a.$$

$$(ii) \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$(iii) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, k \text{ 为常数}.$$

$$(iv) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

(v) 对于 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(vi) 对于函数 $f(x) \geq g(x)$, 有

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx,$$

特别地, 如果 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(vii) 如果 $a < b$, 则有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

性质(iii)、(iv)联合称为定积分的线性性; (v)称为定积分关于积分区间的可加性; (vi)是积分的单调性; (vii)是可积函数的绝对值的可积性. 这些性质的证明留作练习.

现在介绍定积分的中值定理.

定理 3.2.3(积分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 中至少存在一点 ξ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a). \quad (3.2.1)$$

证 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 据连续函数在闭区间达到最大值和最小值的性质, 可设 $M = \max f(x)$, $m = \min f(x)$. 于是

$$m \leq f(x) \leq M.$$

利用定理 3.2.2 性质(vi)、(i)、(iv), 得

$$m(b - a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b - a).$$

除以 $(b - a)$, 得

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

再由连续函数的中间值定理, 把 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 视为 M 与 m 之间的值, 故存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi).$$

定理得证.

定理 3.2.4 (变上限的定积分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则对于 $x \in [a, b]$, 变动上限的定积分

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (3.2.2)$$

是 x 的连续函数. 又如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\Phi(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 可导, 且

$$\Phi'(x) = f(x) \quad \text{或} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

证 按定义,

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt,$$

于是, 在上式中令 $\Delta x \rightarrow 0$ 立即得到 $\Phi(x)$ 的连续性.

又当 $f(x)$ 连续时, 由积分中值定理 3.2.3, 存在 $\xi \in [x, x + \Delta x]$, 使得

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \int_x^{x+\Delta x} 1 dt = f(\xi) \Delta x.$$

故 $\Phi(x)$ 的导数为

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x).$$

定理 3.2.4 是一个非常重要的定理, 下面我们会看到它的理论价值与实际应用.

3.2.2 不定积分的定义、性质、意义与积分法

1. 不定积分的定义及其与定积分的联系

我们从定理 3.2.4 出发引进不定积分.

定义 3.2.1 (原函数) 如果函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足:

$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x) dx, \quad (3.2.3)$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数.

注 1 定理 3.2.4 中的 $\Phi(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数.

注 2 原函数不是惟一的: 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数. 反之, 如果 $G(x)$ 、 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的两个原函数, 则

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

由微分学中值定理 2.5.2 的推论立即得到 $G(x) - F(x) = C$, C 为常数.

因此,只要找到 $f(x)$ 的一个原函数,例如 $F(x)$,则其全部原函数就可表示为

$$F(x) + C, \quad C \text{ 为可取任意值的常数.} \quad (3.2.4)$$

注 3 求原函数的运算可以看作微分的逆运算,(3.2.3)正说明了这一点.

为了计算定积分,必须寻求定义之外的计算工具,原函数就是其中重要的一个.

定理 3.2.5 (牛顿-莱布尼茨 (Newton-Leibniz) 公式) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则

(i) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数,

(ii) 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数,则牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (3.2.5)$$

成立(3.2.5)也记为

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b. \quad (3.2.6)$$

证 (i) 是显然的,因为定理 3.2.4 中变动上限的定积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数.

(ii) 为证明牛顿-莱布尼茨公式(3.2.5),我们选取 $f(x)$ 的原函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, 并得到 $\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, $\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt$. 于是

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t) dt - 0 = \int_a^b f(t) dt.$$

所以,公式(3.2.5)当 $F(x) = \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 时成立.

现在,对 $f(x)$ 的任意原函数 $G(x)$,由(3.2.4)式,有

$$G(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t) dt + C,$$

故

$$G(b) = \Phi(b) + C = \int_a^b f(t) dt + C,$$

$$G(a) = \Phi(a) + C = 0 + C,$$

我们得到

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

这就是要证明的.

牛顿-莱布尼茨公式使我们把求定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的问题化为求被积函数

$f(x)$ 的原函数问题.我们使用记号

$$\int f(x)dx$$

代表 $f(x)$ 的原函数的全体,称 $\int f(x)dx$ 为 $f(x)$ 的不定积分.换言之, $f(x)$ 的原函数的全体称为 $f(x)$ 的不定积分,记为 $\int f(x)dx$,并称 $f(x)dx$ 为被积表达式,称 $f(x)$ 为被积函数.此外,不定积分作为一种运算,是线性的:对于常数 α, β ,有

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx, \quad (3.2.7)$$

例 1 求定积分 $I_1 = \int_{-a}^a \cos mx dx$ 与 $I_2 = \int_{-a}^a \sin mx dx, m \neq 0, a > 0$.

解 由于 $\frac{1}{m} \sin mx$ 是 $\cos mx$ 的一个原函数,故由牛顿-莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-a}^a \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{m} (\sin ma - \sin(-ma)) = 2 \frac{1}{m} \sin ma. \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-a}^a \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx \Big|_{-a}^a \\ &= -\frac{1}{m} (\cos ma - \cos(-ma)) = 0. \end{aligned}$$

例 2 求定积分 $I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx, m, n \neq 0$ 为整数.

解 当 $|m| \neq |n|$, 利用积化和差公式,有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right\}_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

当 $m = n$, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

当 $m = -n$, 有

$$I = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = -\pi.$$

因此,

$$I = \begin{cases} 0, & |m| \neq |n|, \\ \pi, & m = n, \\ -\pi, & m = -n. \end{cases}$$

例 3 求定积分 $I = \int_{-1}^3 |x-1| dx$.

解 注意到 $|x-1| = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x \leq 3, \\ 1-x, & -1 \leq x < 1, \end{cases}$ 故

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-1}^1 (x-1) dx + \int_1^3 (x-1) dx \\ &= - \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]_1^3 = 4. \end{aligned}$$

2. 不定积分的计算

求出被积函数的原函数,或不定积分,将积分上、下限代入牛顿-莱布尼茨公式,便可得定积分的值.由此可知,为求定积分 $\int_a^b f(x) dx$,先求 $f(x)$ 的一个原函数或不定积分便可.

我们现在介绍求不定积分的各种方法.

首先,由微分与不定积分的关系,从微分基本公式可得积分基本公式.

(1) 积分基本公式

$$\int 1 dx = x + C,$$

$$\int x^\mu dx = \begin{cases} \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C, & \mu \neq -1, \\ \ln|x| + C, & \mu = -1, \end{cases}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C,$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

例 4 求不定积分 $I = \int P(x) dx$, 这里 $P(x)$ 是 n 次多项式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

解 利用不定积分的线性与基本积分公式表, 得

$$\begin{aligned} \int P(x) dx &= \int a_n x^n dx + \int a_{n-1} x^{n-1} dx + \cdots + \int a_1 x dx + \int a_0 dx + C \\ &= a_n \int x^n dx + a_{n-1} \int x^{n-1} dx + \cdots + a_1 \int x dx + a_0 \int dx + C \\ &= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C. \end{aligned}$$

例 5 求不定积分 $I = \int (1 - \sqrt{x})^2 dx$.

解 由

$$\begin{aligned} I &= \int (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = x - \frac{2}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^2 + C \\ &= x - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^2 + C. \end{aligned}$$

例 6 已知自由落体的瞬时速度 $v(t) = gt$, g 为重力加速度. 试求落体的降落的高度 $s = s(t)$.

解 因为速度与运动物体所行距离 $s = s(t)$ 的关系是 $s'(t) = v(t) = gt$, 所以 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数, 故 $s(t) = \frac{1}{2} gt^2 + C$, 其中 C 为常数, 由落体的起始高度确定.

例 7 求不定积分 $I = \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$.

解 因为

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right),$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \left[\int \frac{1}{x - a} - \int \frac{1}{x + a} \right] dx \\ &= \frac{1}{2a} [\ln|x - a| - \ln|x + a|] + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C. \end{aligned}$$

(2) 分部积分法

定理 3.2.6 (分部积分公式) 设 $u(x)$ 、 $v(x)$ 以及它们的导数 $u'(x)$ 、 $v'(x)$ 在 $[a, b]$ 上都连续, 则成立分部积分公式

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \quad (3.2.8)$$

公式(3.2.8)也写为

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x), \quad (3.2.9)$$

证 由微分公式 $d(uv) = u dv + v du$ 即可得到上述两个公式.

分部积分法是求不定积分的有力工具, 对于被积函数是 $x^k \ln x$ 、 $x^k \sin ax$ 、 $x^k e^x$ 、 $x^k \arcsin ax$ 等类型时, 使用这个工具能得到所要求的不定积分.

例 8 求 $I = \int x \sin x dx$.

解 在此题中, 被积函数 $x \sin x$ 是两个函数 x 与 $\sin x$ 相乘, 如果取 $u(x) = \sin x$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$, 则被积表达式成为 $x \sin x dx = \sin x d \frac{x^2}{2}$, 这比原来的反而复杂了. 但是, 如果取 $u(x) = x$ 、 $v(x) = -\cos x$, 就有 $dv = d(-\cos x)$,

$$\begin{aligned} I &= \int x \sin x dx = \int x d(-\cos x) = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

这个例子告诉我们两件事:

第一, 使用分部积分法时, 要注意 $u(x)$ 、 $v(x)$ 的选择, 选取不当, 反而会使问题变麻烦, 甚至不能求得答案.

第二, 分部积分法是把一个不易求的不定积分 $\int u(x)dv(x)$ 化为可以求得的不定积分 $\int v(x)du(x)$.

例 9 求 $I = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

解 设 $u(x) = \ln x$ 、 $v(x) = -\frac{1}{x}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \ln x - \int \left(-\frac{1}{x}\right) d \ln x = \frac{1}{x} (\ln x + 1) + C. \end{aligned}$$

例 10 求 $I = \int \ln x dx$.

解 设 $u(x) = \ln x$ 、 $v(x) = 1$, 则

$$I = \int \ln x dx = x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x} \right) dx = x(\ln x - 1) + C.$$

分部积分法还可以连续使用几次.

例 11 求 $I = \int x^2 e^x dx$.

解 设 $u(x) = x^2$ 、 $v(x) = e^x$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + e^x + C. \end{aligned}$$

例 12 求 $I = \int e^{ax} \cos \beta x dx$, $a \neq 0$.

解 设 $u(x) = \cos \beta x$ 、 $v(x) = \frac{1}{a} e^{ax}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int \cos \beta x d\left(\frac{1}{a} e^{ax}\right) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos \beta x - \frac{1}{a} \int e^{ax} d(\cos \beta x) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos \beta x + \frac{\beta}{a} \int e^{ax} \sin \beta x dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos \beta x + \frac{\beta}{a^2} e^{ax} \sin \beta x - \frac{\beta^2}{a^2} \int e^{ax} \cos \beta x dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos \beta x + \frac{\beta}{a^2} e^{ax} \sin \beta x - \frac{\beta^2}{a^2} I + C. \end{aligned}$$

由上式解出

$$I = \int e^{ax} \cos \beta x dx = \frac{1}{a^2 + \beta^2} (a \cos \beta x + \beta \sin \beta x) e^{ax} + C.$$

同理

$$I = \int e^{ax} \sin \beta x dx = \frac{1}{a^2 + \beta^2} (-\beta \cos \beta x + a \sin \beta x) e^{ax} + C.$$

(3) 换元积分法

换元积分法是将不定积分的被积表达式 $f(x)dx$ 中的自变量 x 用新变量 t 的函数 $\varphi(t)$ 来作替换, 即令 $x = \varphi(t)$, 在一定的假设下, 就可得关于换元积分的定理.

定理 3.2.7 (换元积分公式) 设 $x = \varphi(t)$ 有连续导数 $\varphi'(t)$, 并且 $dx = \varphi'(t)dt$, 又设反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$ 存在, 则成立换元积分公式

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (3.2.10)$$

进而, 如果 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数为 $F(t)$, 则

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi^{-1}(x)) + C. \quad (3.2.11)$$

对上式两边求微分,便可看出左、右两边有相同的原函数,因而得到定理的证明.换元积分法常常还有如下形式.

定理 3.2.8(换元积分公式) 若存在连续可微函数 $\phi(x)$,使得被积表达式能写为 $f(\phi(x))\phi'(x)dx$,令 $u = \phi(x)$,则成立

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du. \quad (3.2.12)$$

进而,如果 $f(u)$ 的一个原函数为 $G(u)$,则

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du = G(u) + C = G(\phi(x)) + C. \quad (3.2.13)$$

例 13 求 $I = \int \sin^2 x \cos x dx$.

解 用公式(3.2.13),令 $u = \phi(x) = \sin x$, $\cos x dx = du$,于是

$$I = \int \sin^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

例 14 求 $I = \int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

解 用公式(3.2.13),令 $u = \ln x$, $\frac{1}{x} dx = du$,于是

$$I = \int \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

在使用熟练时,可以省略一些步骤.

例 15 求 $I = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx, a \neq 0$.

解 改写 I 为

$$I = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

令 $u = \frac{x}{a}$, 则

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

例 16 求 $I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, a > 0$.

解 改写 I 为

$$I = \int \frac{a d\left(\frac{x}{a}\right)}{a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}},$$

令 $u = \frac{x}{a}$, 则

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

例 17 求 $I = \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$.

解 令 $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, 则由 (3.2.11),

$$I = \int \frac{2}{1+t^2} dt = 2\arctan t + C = 2\arctan \sqrt{x} + C.$$

例 18 求 $I = \int \frac{1}{\sin x} dx$.

解 将不定积分化为

$$I = \int \frac{1}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

例 19 求 $I = \int \frac{1}{\cos x} dx$.

解 同理可得

$$I = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \right| + C.$$

例 20 求 $I = \int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

解 将 I 写为

$$I = \int \sin^4 x \cos^4 x d\sin x = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 d\sin x.$$

作代换 $t = \sin x$,

$$\begin{aligned} I &= \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) dt \\ &= \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C. \end{aligned}$$

我们举例说明一些常用的变量代换.

(i) **三角函数代换** 我们常用三角公式去掉被积函数中的根式.

例 21 求 $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, a > 0$.

解 令 $x = a \sin t, |t| \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, dx = a \cos t dt$, 且 $t = \arcsin \frac{x}{a}$, 故

$$\begin{aligned} I &= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right) + C \\ &= \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

例 22 求 $I = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$.

解 作三角函数代换, $x = \tan t$, 则 $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$, 于是,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\tan^2 t \cdot \sec t} \left(\frac{1}{\cos^2 t} \right) dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t} \\ &= -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sec t}{\tan t} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

例 23 求 $I = \int \frac{1}{(a^2 + x^2)^2} dx, a > 0$.

解 令 $x = a \tan t, |t| \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt, t = \arctan \frac{x}{a}$, 故

$$I = \int \frac{1}{(a^2 + a^2 \tan^2 t)^2} \cdot \frac{a}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt,$$

利用解例 22 过程中已经计算出来的结果

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C,$$

为代回原来的变量, 由 $x = a \tan t$ 求得 $\sin 2t = \frac{2ax}{a^2 + x^2}$, 于是

$$I = \frac{1}{2a^3} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \frac{x}{a^2 + x^2} + C,$$

(ii) 倒变量代换 将自变量 x 代换为 $x = \frac{1}{t}$.

例 23 中, 求积分 $I = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$ 还可以用“倒变量代换”. 令 $x = \frac{1}{t}$,

则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 于是, 对 $x > 0$,

$$\begin{aligned}
 I &= - \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} \\
 &= -\sqrt{1+t^2} + C = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.
 \end{aligned}$$

对 $x < 0$ 同样可得.

(iii) 根式代换 把根式下的函数或根式本身作为新变量, 就能去掉根式.

例 24 求 $I = \int x \sqrt{2x+1} dx$.

解 把根式下的函数作为新变量, 设 $t = 2x+1$, 则 $dx = \frac{1}{2}dt$, 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{4}(t-1)\sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \int (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) dt \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) + C = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} (2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right) + C \\
 &= \frac{1}{15} (2x+1)^{\frac{3}{2}} (3x-1) + C.
 \end{aligned}$$

还可以作代换 $u = \sqrt{2x+1}$, 则 $x = \frac{1}{2}(u^2-1)$, $dx = u du$, 所以

$$I = \int \frac{1}{2}(u^2-1)u^2 dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 \right) + C,$$

用 $u = \sqrt{2x+1}$ 代入, 就可以得到同样的结果.

例 25 求 $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda}} dx$, $\lambda \neq 0$.

解 这里被积函数中的根式与例 24 不同, 根号下含 x 的平方项, 若仍令 $t = x^2 + \lambda$, 求 x, dx 时还是消不掉根式. 此时要用代换

$$\sqrt{x^2+\lambda} = t - x,$$

于是, $x = \frac{t^2 - \lambda}{2t}$, $dx = \frac{t^2 + \lambda}{2t^2}$, 因此

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x + \sqrt{x^2+\lambda}| + C.$$

(iv) 欧拉 (L. Euler) 变换 对被积表达式是 x 与 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的有理函数时使用.

① 若 $a > 0$, 则令 $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{ax}$;

② 若 $c > 0$, 则令 $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$;

③ 若 ax^2+bx+c 有两个相异的实根 λ, μ , 则令

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda).$$

若被积表达式是 x 与 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ 的有理函数, 则上述三种变换总可以将 x 与根式 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ 同时用 t 的有理形式(不含根式)表示出来.

例 26 求 $I = \int \frac{1}{\sqrt{1-u-u^2}} du$.

解 先作倒变换 $u = \frac{1}{x}$, 则 $du = -\frac{dx}{x^2}$, 故

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-u-u^2}} du = - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}.$$

再令 $\sqrt{x^2-x-1} = t-x$, 则

$$x = \frac{t^2+1}{2t-1}, \quad dx = 2 \frac{t^2-t-1}{(2t-1)^2} dt, \quad t-x = \frac{t^2-t-1}{2t-1}.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-1}} dx = - \int \frac{2t-1}{t^2-t-1} \cdot \frac{t^2-t-1}{(2t-1)^2} dt \\ &= -2 \int \frac{1}{2t-1} dt = -\ln|2t-1| + C \\ &= -\ln|2(x+\sqrt{x^2-x-1})-1| + C \\ &= -\ln \left| \frac{2(1+\sqrt{1-u-u^2})-u}{u} \right| + C. \end{aligned}$$

例 27 求 $I = \int \frac{1}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt[3]{x-1})} dx$.

解 令 $t = \sqrt[6]{x-1}$, 则 $\sqrt{x-1} = t^3$, $\sqrt[3]{x-1} = t^2$, $x = t^6 + 1$, $dx = 6t^5 dt$. 于是

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{t^5}{t^3(1+t^2)} dt = 6 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= 6(t - \arctan t) + C = 6(\sqrt[6]{x-1} - \arctan \sqrt[6]{x-1}) + C. \end{aligned}$$

例 28 求 $I = \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx$.

解 令 $t = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$, 则 $x = \frac{2(t^2+1)}{t^2-1}$, $dx = -\frac{8t}{(t^2-1)^2} dt$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt = -2 \int \left(\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2-1} \right) dt \\ &= -2 \int \frac{1}{1+t^2} dt - \int \frac{1}{t-1} dt + \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= -2\arctan t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \end{aligned}$$

$$= -\arctan \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} - 1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + 1} \right| + C.$$

(4) 几种积分方法的综合使用

例 29 求 $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx, a \neq 0$.

解 首先利用分部积分法, 有

$$\begin{aligned} I &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int x d \sqrt{x^2 + a^2} \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx. \end{aligned}$$

于是

$$2I = x \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx.$$

利用例 25 实际上是根式代换的结果, 取 $\lambda = a^2$, 得到

$$I = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

例 30 求 $I_n = \int \frac{1}{(a^2 + x^2)^n} dx, a > 0, n = 1, 2, \dots$.

解 $n = 1$ 时由例 16 给出, $n = 2$ 就是例 24. 现在求 $n > 2$ 时的积分值 I_n 按分部积分法,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{(a^2 + x^2)^n} dx \\ &= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} - \int x d \frac{1}{(a^2 + x^2)^n} \\ &= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(a^2 + x^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

由此得到递归公式

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

从而 I_n 的值可以用递推公式得到.

(5) 有理函数的积分方法

有理函数的积分应用广泛,我们要较详细地介绍.有理函数又称有理分式,它是两个实系数多项式的商,即

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}.$$

可以假设 $n < m$, 亦即, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是既约真分式(当 $n \geq m$ 时,可用分式除法将有理分式化为多项式与既约真分式的和).

定义 3.2.2(部分分式) 称形如

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

与

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad p^2-4q < 0, k=1, 2, 3, \dots$$

的有理分式为部分分式,也称最简分式.

定理 3.2.9(有理函数的分解) 设 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 是既约真分式,则 $R(x)$ 必可分解为有限多个部分分之和.

由于任何实系数多项式都可分解因式为

$$Q(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{l_1}(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{l_2} \cdots$$

形式,再利用待定系数法,就可证明定理 3.2.9.我们列表如下.

分母 $Q(x)$ 中含有的因式	部分分式中含有对应的项
单因式 $(x-a)$	$\frac{A}{(x-a)}$
k -重因式 $(x-a)^k$	$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$
二次式 x^2+px+q $p^2-4q < 0$	$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$
k -重二次式 $(x^2+px+q)^k$ $p^2-4q < 0$	$\frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2}$ $+ \dots + \frac{M_k x + N_k}{(x^2+px+q)^k}$

我们首先把 4 种既约部分分式的积分求出,再举一般的例子.

$$\text{第 1 种 } I = \int \frac{A}{x-a} dx.$$

$$\text{公式: } I = \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

$$\text{第 2 种 } I = \int \frac{A}{(x-a)^k} dx \quad (k=2,3,\dots).$$

$$\text{公式: } I = \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C \quad (k=2,3,\dots).$$

$$\text{第 3 种 } I = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{公式: } I &= \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C. \end{aligned}$$

这是因为由分解式

$$\begin{aligned} I &= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \\ &\quad \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \\ &\quad \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}} + C, \end{aligned}$$

即得第 3 种公式.

$$\text{第 4 种 } I = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx \quad (k=2,3,\dots).$$

$$\begin{aligned} \text{公式: } I &= \frac{M}{2(1-k)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \\ &\quad \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{1}{(u^2+a^2)^k} du \end{aligned}$$

其中 $u = x + \frac{p}{2}$, $a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, 公式中的第二个积分可用例 31 的递推公式得到.

例 31 求 $I = \int \frac{6x^2 - 11x + 4}{x(x-1)^2} dx$.

解 被积函数是一个既约真分式, 分母中含单因式 x 与二重因式 $(x-1)^2$, 于是由定理 3.2.9 中的表格, 得到分解式:

$$\frac{x^2 - 11x + 4}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

通分后, 得关于分子的恒等式

$$6x^2 - 11x + 4 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx.$$

令 $x=0$, 得 $A=4$; 再令 $x=1$, 得 $C=-1$. 最后比较上式中 x^2 项的系数, 得 $A+B=6$, 故有 $B=2$. 因此

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 - 11x + 4}{x(x-1)^2} dx = \int \left\{ \frac{4}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right\} dx \\ &= 4\ln|x| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

例 32 求 $I = \int \frac{1}{x^3+1} dx$.

解 由 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, 故分解为部分分式时, 有

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

通分后得到关于分子的恒等式

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (x+1)(Mx+N).$$

令 $x=-1$ 确定 $A=\frac{1}{3}$. 再比较 x^2 的系数, 确定 $M=-\frac{1}{3}$. 最后比较常数项, 得

$N=\frac{2}{3}$. 因此,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

例 33 求 $I = \int \frac{x^2-2x-2}{x^3-1} dx$.

解 由 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, 故分解为部分分式时, 有

$$\frac{x^2-2x-2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

通分后得到关于分子的恒等式

$$x^2 - 2x - 2 = A(x^2 + x + 1) + (x - 1)(Mx + N).$$

比较上式的系数,得

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

最后得

$$I = \int \frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1} dx = \ln \frac{|x^2 + x + 1|}{|x - 1|} + C.$$

例 34 求 $I = \int \frac{x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} dx.$

解 被积函数是假分式,先利用多项式除法,得

$$\frac{x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} = x^2 + \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2}.$$

将第二项真分式分解为部分分式:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + 1)^2}.$$

用比较系数法得(我们省略确定常数的步骤):

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{x + 2}{x^2 + 1} - \frac{3x + 4}{(x^2 + 1)^2}.$$

于是

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{1}{x - 2} dx - \int \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx - \int \frac{3x + 4}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \int \frac{1}{x - 2} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx - 3 \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx - 4 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \ln |x - 2| - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) - 2 \arctan x + \frac{3}{2(x^2 + 1)} - \frac{2x}{x^2 + 1} - 2 \arctan x + C. \end{aligned}$$

最后得本题结果

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{3 - 4x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 1} - 4 \arctan x + C. \end{aligned}$$

例 35 求 $I = \int \frac{1}{\sin x \cos 2x} dx.$

解 我们有

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sin x (2\cos^2 x - 1)} dx = \int \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)(2\cos^2 x - 1)} dx \\ &= \int \frac{d\cos x}{(\cos^2 x - 1)(2\cos^2 x - 1)} dx. \end{aligned}$$

令 $t = \cos x$, 得

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{(t^2-1)(2t^2-1)} dx = \int \frac{1}{t^2-1} dx - \int \frac{2}{2t^2-1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{1}{t-1} dx - \int \frac{1}{t+1} dx \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int \frac{1}{\sqrt{2}t-1} dx - \int \frac{1}{\sqrt{2}t+1} dx \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1} \right| + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x-1}{\cos x+1} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1} \right| + C.
 \end{aligned}$$

例 36 求 $I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.

解 我们有

$$\begin{aligned}
 I &= \int \tan^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\tan^4 x}{\sec^4 x} \cdot d \tan x \\
 &= \int \frac{\tan^4 x}{(1+\tan^2 x)^2} d \tan x.
 \end{aligned}$$

令 $t = \tan x$, 得

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{t^4}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{(t^2+1)^2 - 2t^2 - 1}{(1+t^2)^2} dt \\
 &= \int \left\{ 1 + \frac{-2t^2-1}{(1+t^2)^2} \right\} dt = \int \left\{ 1 - \frac{2}{1+t^2} + \frac{1}{(1+t^2)^2} \right\} dt \\
 &= t - \frac{3}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} + C = \tan x - \frac{3}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.
 \end{aligned}$$

例 37 求 $I = \int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} dx, 0 < r < 1, |x| < \pi$.

解 作“万能代换” $t = \tan \frac{x}{2}$, 于是

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

从而

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1-r^2}{1-2r \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + r^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
 &= \int \frac{2(1-r^2)}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2(1-r)}{1+r} \int \frac{1}{\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 + t^2} dt \\
 &= 2 \arctan \frac{1+r}{1-r} t + C = 2 \arctan \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \frac{x}{2} \right) + C.
 \end{aligned}$$

其实, 万能代换总可以把三角函数有理分式化为有理分式.

3.2.3 定积分的计算

牛顿-莱布尼茨公式提供了求定积分的一个计算方法, 因此我们在 3.2.2 节中用较大篇幅介绍了不定积分的求法. 为求定积分的值, 只要求出其被积函数的不定积分, 代入牛顿-莱布尼茨公式就可得到. 另一方面, 我们给出定积分的分部积分公式和换元积分公式, 可以直接对定积分进行计算.

定理 3.2.10 (定积分的分部积分公式) 设 $u(x)$ 、 $v(x)$ 以及它们的导数 $u'(x)$ 、 $v'(x)$ 在 $[a, b]$ 上都连续, 则成立

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx, \quad (3.2.14)$$

也写为

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x), \quad (3.2.15)$$

定理 3.2.11 (定积分的换元积分公式) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 并且 $x = \varphi(t)$ 满足:

(i) 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上是单值函数, 存在反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, 且有连续导函数 $\varphi'(t)$;

(ii) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; 并且当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时, $\varphi(t)$ 的值不超出区间 $[a, b]$, 则成立

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (3.2.16)$$

这两个定理的证明可直接从不定积分的相应公式得到.

例 38 求 $J = \int_0^{e-1} \ln(1+x) dx$.

解 利用分部积分公式(3.2.14), 得

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{e-1} \ln(1+x) dx = (x \ln(1+x)) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{1+x} dx \\
 &= (e-1) - \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx \\
 &= (e-1) - (e-1) + \int_0^{e-1} \frac{1}{1+x} dx = (\ln|1+x|) \Big|_0^{e-1} = 1.
 \end{aligned}$$

例 39 求 $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

解 对于 $n=0, 1, 2, \dots$, 我们分别求出 J_n .

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x dx = (-\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \left(-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right)_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

再利用分部积分公式找出 J_n 的递推关系式.

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(\cos x) \\ &= (\cos x \sin^{n-1} x)_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot [(n-1) \sin^{n-2} x] dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1) [J_{n-2} - J_n]. \end{aligned}$$

由此求出

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-1},$$

则得

$$J_n = \begin{cases} J_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & k=1, 2, \dots, \\ J_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & k=0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

这里 $(2k)!! = 2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 2$; $(2k+1)!! = (2k+1) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 1$.

例 40 求 $J = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} dx$.

解 作变元代换 $x = \sec u$, $dx = 2 \sec u \cdot \tan u du$, 并且当 $u=0$ 时 $x=2$,

$u = \frac{\pi}{4}$ 时 $x = 2\sqrt{2}$, 故

$$\begin{aligned}
 J &= \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4\sec^2 u - 4}}{8\sec^3 u} 2\sec u \cdot \tan u du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 u}{\sec^2 u} du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u du = \frac{1}{4} \left(u - \frac{\sin 2u}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi-2}{16}.
 \end{aligned}$$

例 41 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上连续, 试证

$$J = \int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数,} \\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

证 写定积分 J 为

$$J = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx,$$

对第一个积分作变量代换, 令 $x = -t$, 则 $dx = -dt$, $x = -a, 0$ 分别对应于 $t = a, t = 0$, 故得

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \begin{cases} \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数,} \\ -\int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

例 42 求 $J = \int_{-5}^5 \sqrt{9 - \frac{9}{25}x^2} dx$.

解 被积函数是偶函数, 利用例 42 的结果得

$$J = 2 \int_0^5 \sqrt{9 - \frac{9}{25}x^2} dx = \frac{6}{5} \int_0^5 \sqrt{5^2 - x^2} dx,$$

由于被积函数有一个原函数

$$\frac{6}{5} \left\{ \frac{x \sqrt{5^2 - x^2}}{2} + \frac{5^2}{2} \arcsin \frac{x}{5} \right\},$$

利用牛顿-莱布尼茨公式得到

$$J = \frac{6}{5} \left\{ \frac{x \sqrt{5^2 - x^2}}{2} + \frac{5^2}{2} \arcsin \frac{x}{5} \right\} \Big|_0^5 = \frac{15}{2} \pi.$$

例 43 求 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta$.

解 在求定积分 J 的同时, 我们考虑定积分

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta.$$

对 K 作变量代换 $\theta = \frac{\pi}{2} - t$ 则 $d\theta = -dt$, 且 $t = \frac{\pi}{2}, t = 0$ 分别对应于 $\theta = 0$,

$\theta = \frac{\pi}{2}$. 于是

$$K = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} d(-t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt,$$

这就是 $K = J$. 这样

$$2J = J + K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2},$$

最后得 $J = \frac{\pi}{4}$.

注 不定积分与定积分的换元积分法不同之处是:不定积分的换元积分法得到关于新变量的结果后,一定要把变量换回原来的变量,而定积分换元积分法则不需要,只要注意新、老变量的积分限的对应关系就可以了.

3.2.4 椭圆积分

前面介绍了许多积分方法,但是我们必须强调,对于在区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$, 积分 $\int f(x)dx$ 存在,可是却未必能用初等函数表示出来.椭圆积分就是这种积分.

I. 第一类椭圆积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1.$$

II. 第二类椭圆积分

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1.$$

III. 第三类椭圆积分

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1,$$

这里 h 为复参数.

在适当的变量代换下,三类椭圆积分可分别化为

$$\text{I. } \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (0 < k < 1);$$

$$\text{II. } \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi \quad (0 < k < 1);$$

$$\text{III. } \int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (0 < k < 1).$$

还有一些得不到以初等函数为原函数的积分,例如被积函数为

$$\frac{e^x}{x^n}, \quad \frac{\sin x}{x^n}, \quad \frac{\cos x}{x^n}.$$

常给出以下三种典型的情形,称为积分对数、积分正弦、积分余弦.

① 积分对数

$$\int \frac{e^t}{x} dx = \int \frac{dt}{\ln t} = \text{li } t;$$

② 积分正弦

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \text{si } t;$$

③ 积分余弦

$$\int \frac{\cos x}{x} dx = \text{ci } t.$$

习 题

1. 利用定义求 $\int_a^b x dx (a < b)$.
2. 试证定理 3.2.2 的结论(i)、(iii)、(iv)、(v)与(vii).
3. 设 $\Phi(x) = \int_0^x \sin \sqrt{t} dt (t > 0)$, 求 $\Phi'(x)$.
4. 求下列不定积分

$$(1) \int (4x^3 - 2x^2 + 5x + 3) dx$$

$$(2) \int (1 - 2x)^2 \sqrt{x} dx$$

$$(3) \int \frac{(x - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$(5) \int (10^x + \cot^2 x) dx$$

$$(6) \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx$$

$$(7) \int \frac{dx}{1 - x^2}$$

$$(8) \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$$

$$(9) \int \frac{dx}{(x + a)(x + b)}$$

$$(10) \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(11) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

$$(12) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$$

$$(13) \int \frac{1 - x^2}{1 + x^2} dx$$

$$(14) \int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$$

$$(15) \int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$$

$$(16) \int \frac{x^3 - 27}{x - 3} dx$$

$$(17) \int \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} dx$$

$$(18) \int |x - 1| dx$$

5. 利用分部积分法计算下列不定积分

(1) $\int x \cos 2x dx$

(2) $\int x^2 \sin 2x dx$

(3) $\int \ln^2 x dx$

(4) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$

(5) $\int \arctan x dx$

(6) $\int x^2 \arctan x dx$

(7) $\int x e^{-x} dx$

(8) $\int x^2 e^{2x} dx$

(9) $\int (\arcsin x)^2 dx$

(10) $\int x^2 \ln(1+x) dx$

(11) $\int x^n \ln x dx (n \in \mathbb{N})$

(12) $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

(13) $\int \sin x \ln(\tan x) dx$

(14) $\int e^{2x} \cos 3x dx$

(15) $\int e^{2x} \sin 3x dx$

6. 利用换元积分法计算下列不定积分

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$

(2) $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$

(3) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

(4) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

(5) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$

(6) $\int \tan x dx$

(7) $\int \cot x dx$

(8) $\int \frac{dx}{\sin^2 \sqrt[4]{\cot x}}$

(9) $\int \cos^3 x dx$

(10) $\int \cos^4 x dx$

(11) $\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} dx$

(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^2}$

(13) $\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

(14) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} \quad (x > 0)$

(15) $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} dx$

(16) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}}$

(17) $\int (1+x^3)^{3/2} x^5 dx$

(18) $\int \frac{\ln x}{x \sqrt{1+\ln x}} dx$

(19) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(20) $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} \quad (a \neq b)$

7. 用适当的方法计算下列各题

(1) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (b > a)$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(b+x)}}$

(4) $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-13)^2}}$

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

(7) $\int \sin(\ln x) dx$

(8) $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

(9) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

(11) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$

(12) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx$

(13) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} dx$

(14) $\int \frac{6x^2-11x+4}{x^2(x-1)^3} dx$

(15) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3} dx$

(16) $\int \frac{x+1}{x^3+4x+13} dx$

(17) $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} dx$

(18) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx$

(19) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$

(20) $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} dx$

(21) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$

(22) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx$

(23) $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^3+1)(x^2+x+1)^2} dx$

(24) $\int \cos^5 x dx$

(25) $\int \sin^5 x \cos^5 x dx$

(26) $\int \tan^3 x dx$

(27) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

(28) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$

(29) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

(30) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

(31) $\int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx$

(32) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2} dx$

(33) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}}$

(34) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$

(35) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$

(36) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

(37) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-x+1}}$

(38) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

8. 不要计算定积分, 比较下列积分值的大小

(1) $\int_0^1 x^3 dx$ 与 $\int_0^1 x^4 dx$ (2) $\int_1^2 x^3 dx$

9. 按定积分的性质, 估计下列积分之值

(1) $\int_1^3 (x^2+2) dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{6}} (1+\cos^2 x) dx$

10. 设 $\Phi(x) = \int_x^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$, 求 $\Phi'(x)$.

11. 设 $\Phi(x) = \int_x^{x^2} t^2 e^{-t} dt$, 求 $\Phi'(x)$.

12. 设 $\Phi(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} t^2 e^{-t} dt$, 求 $\Phi'(x)$, 这里 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 都是 x 的可微函数.

13. 试求 $\Phi(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$ 的极值.

14. 设 $\Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t^3} (x>0)$, 求 $\Phi''(x)$.

15. 计算下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) dt}{x^2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \arctan(3t) dt}{x^3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (1 - \cos t) dt}{x^6}$$

16. 求下列定积分之值

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$(4) \int_0^2 |x-1| dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$$

$$(6) \int_4^9 (1 + \sqrt{x}) \sqrt{x} dx$$

$$(7) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$(8) \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{x}{\sqrt{3a^2 - x^2}} dx \quad (a>0)$$

$$(9) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$$

$$(10) \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$$

$$(11) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$(12) \int_1^e \ln^3 x dx$$

$$(13) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

$$(14) \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$$

$$(15) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^3 x}} dx$$

$$(16) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx$$

$$(17) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$(18) \int_{-1}^1 \frac{x^2 + \sin x}{1 + x^2} dx$$

$$(19) \int_1^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 5x + 1}}$$

$$(20) \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$(21) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

$$(22) \int_0^1 \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx$$

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续、以 T 为周期的函数, 试证 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$ (a 为任意实数).

18. 试证: $\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2} (x > 0)$.

19. 试证: 若 $f(x)$ 连续且为偶函数(奇函数), 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数(偶函数).

20. 试证: $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

21. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 试证:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

$$(2) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

22. 试证: 狄利克雷(Peter Gustav Lejeune Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ 1, & x \text{ 为有理数,} \end{cases}$$

在区间 $[0, 1]$ 上不可积.

23. 试证: 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx,$$

称此为施瓦兹(Hermann Amandus Schwarz)不等式.

24. 试证: $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b (f(x))^2 dx$.

25. 试求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的面积.

26. 试求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围区域的面积.

27. 试求闭曲线 $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$, $(a > 0)$ 所围区域的面积.

28. 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 所围成的图形的面积.

29. 求在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上由曲线 $y = \ln x$, Ox 轴及二直线 $x = \frac{1}{2}$ 与 $x = 2$ 所围成的平面的区域的面积.

30. 求旋轮线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 一拱 $(a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 Ox 轴所围成的区域的面积.

31. 求三叶玫瑰线 $r = a \cos 3\theta$ $(a > 0)$ 所围成区域的面积.

32. 求悬链线 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ 在 $[0, a]$ 上的弧长.

33. 求曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 的全长.

34. 求星形线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ $(a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$ 的全长.

35. 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 的全长.

§ 3.3 多重积分

多重积分是黎曼积分在多元函数情形下的推广. 我们以二元情形为主, 也简单介绍三重与 $n, n > 3$ 重积分.

3.3.1 二重积分的定义、性质

1. 二重积分的定义

我们从一个例子出发. 设二元函数 $z = f(x, y) \geq 0$ 在 xy 平面上的有界闭区域 D 中定义并且连续. 在三维空间 R^3 中, 由以下三个曲面围成的一个立体 Ω

其顶为曲面: $z = f(x, y)$

其底为 xy 平面上的区域: D

其侧面为柱面: 准线是 D 的边界 ∂D , 母线平行于 Q_z 轴. 称 Ω 为曲顶柱体(如图 3.3.1).

现在来求此曲顶柱体 Ω 的体积 V .

解决的思路与求曲边梯形面积类似. 首先用一个分法 r 把区域 D 分成 n 个小区域

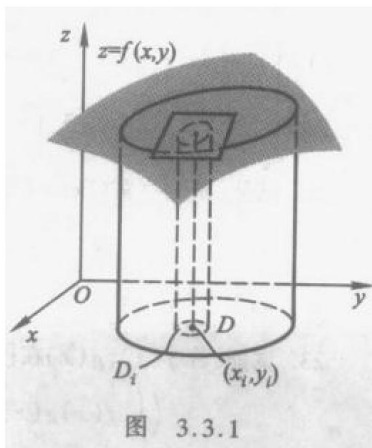


图 3.3.1

$$D_1, D_2, \cdots, D_i, \cdots, D_n,$$

并把 D_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i, i=1, 2, \cdots, n$, 把 $d_i \equiv \sup \{d(P, Q) : P, Q \in D_i\}$ 称为 D_i 的直径(这是圆的直径的推广). 又记

$$\lambda = \max \{d_i : i=1, 2, \cdots, n\},$$

称 λ 为分法 r 的模.

为求曲顶柱体 Ω 的体积, 在小区域 D_i 中任取一点 $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, 于是以 D_i 为底、 $z_i = f(\xi_i, \eta_i)$ 为高的小平顶柱体的体积为 $V_i = f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$. 这样我们可以得到曲顶柱体体积 V 的近似值

$$\sum_{i=1}^n V_i \equiv \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

让分法 r 的模 $\lambda \rightarrow 0$, 如果极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

存在、有限, 则它就是曲顶柱体 Ω 的体积 V .

我们假设 $f(x, y) \geq 0$ 且连续, 仅为作图方便. 在定义时, 可以去掉这两个条件.

定义 3.3.1(二重积分) 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在 xOy 平面上的有界闭区域 D 中定义, 任取一个分法 r , 将区域 D 分为 n 个小区域

$$D_1, D_2, \cdots, D_i, \cdots, D_n \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

D_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i, i=1, 2, \cdots, n$, 直径记为 $d_i \equiv \sup \{d(x, y) : x, y \in D_i\}$, 模记为 $\lambda = \max \{d_i : i=1, 2, \cdots, n\}$. 在每个小区域 D_i 中任取一点 $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, 作和式

$$\sum_{i=1}^n V_i \equiv \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

让分法 r 的模 $\lambda \rightarrow 0$, 如果极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \quad (3.3.1)$$

存在、有限, 并且与分法 r 以及点 (ξ_i, η_i) 的选取无关, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \quad (3.3.2)$$

称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上黎曼可积, 简称 $\mathbf{R}$ -可积或可积. $f(x, y)$ 称为被积函数, D 称为积分区域, $d\sigma$ 称为面积元素. 在直角坐标下, 面积元素也可记为 $dx dy$.

回顾建立一元函数的黎曼积分时的思路,与二重积分的定义非常相似,也体现了“细分取近似、求和取极限”的过程.这实际上是“求积”的共同特点,以后还会遇到类似的问题.

可以证明,当函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续时, $f(x, y)$ 在 D 上必可积.

2. 二重积分的性质

黎曼积分在一元情形的性质可以平行地移到二重积分情形来.我们列出这些性质而不加证明.

定理 3.3.1 (二重积分的性质) 设函数 $f(x, y)$ 、 $g(x, y)$ 均在平面区域 D 上可积,则

(i) $\iint_D d\sigma = \sigma(D)$, 这里 $\sigma(D)$ 是区域 D 的面积.

(ii) 积分的线性性质:

对于常数 α, β , 函数 $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ 在 D 上也可积, 并成立

$$\iint_D \{\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\} d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

(iii) 积分关于积分区域的可加性质:

如果平面区域被分为两个子区域 D_1, D_2 , 且 D_1, D_2 至多相交于有限多条逐段光滑的曲线, 则 $f(x, y)$ 在 D_1, D_2 上都可积, 并成立

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

(iv) 积分的单调性质:

设函数在区域 D 上满足 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则成立

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

(v) 函数绝对值的可积性质:

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上可积, 则 $|f(x, y)|$ 也可积, 并成立

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

(vi) 积分中值定理:

设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma(D).$$

若 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值与最小值分别为 m, M , 则成立

$$m \leq \frac{1}{\sigma(D)} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M.$$

3.3.2 二重积分的计算, 直角坐标、极坐标下的计算公式

1. 在直角坐标系下二重积分的计算

为计算二重积分(3.3.2), 我们在直角坐标系中求曲顶柱体 Ω 的体积 V , 并由此归纳出一般的计算步骤.

设函数 $z=f(x, y)$ 定义在闭区域 D 上, D 是由直线 $x=a, x=b(a < b)$ 与曲线 $y=\varphi(x), \psi(x)(\varphi(x) \leq \psi(x))$ 围成, 如图 3.3.2 所示, D 是 $\mathbf{R}^3$ 中平面 $z=0$ 上的图形,

$$D = \{(x, y): \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}. \quad (3.3.3)$$

任取 $x \in [a, b]$, 过点 $S(x, 0, 0)$ 作平面 π , 垂直于 x 轴, π 与 Ω 相截得到一个曲边梯形 $MNPQ$, 见图 3.3.3, 可表示为截面 $\pi: x=x$ 上的区域

$$\{(y, z): 0 \leq z \leq f(x, y), \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

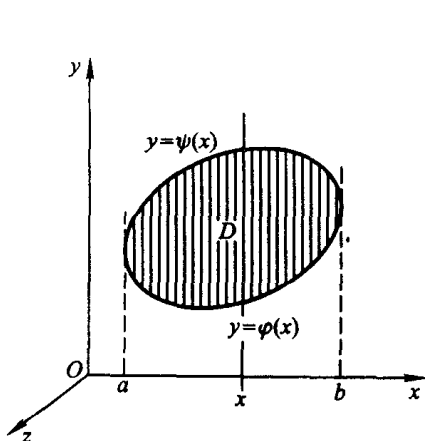


图 3.3.2

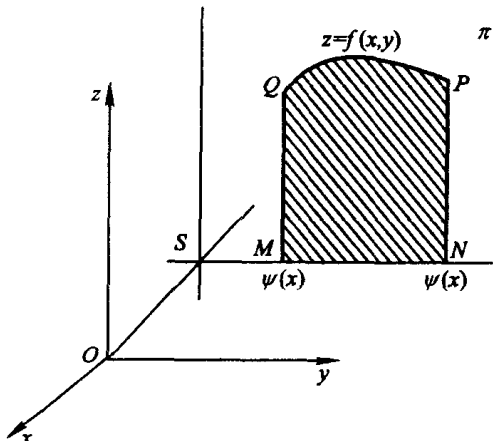


图 3.3.3

此曲边梯形 $MNPQ$ 的面积(比较一元函数的黎曼积分)为

$$A(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy,$$

上式积分中的 x 暂时看作常数, y 是积分变量. 于是曲顶柱体 Ω 可以看作截面 π 上的曲边梯形累积(细分取近似、求和取极限)而成, Ω 的体积也就等于曲边梯形面积 $A(x)$ 累积而成, 所以

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right\} dx,$$

通常把上述公式记为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right\} dx.$$

公式右边的积分称为累次积分,它只需在 $f(x, y)$ 可积的条件下就成立. 然而, 此公式的理论依据是如下定理, 我们叙而不证.

定理 3.3.2 (二重积分计算公式) 设定义在平面区域 D 上的函数 $f(x, y)$, 其二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 存在, 区域 D 可写为 (3.3.3) 的形式, 又对于每个 $x \in [a, b]$, 单积分

$$J(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy, \quad (3.3.4)$$

存在, 则累次积分

$$\int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right\} dx \quad (3.3.5)$$

存在, 并且成立公式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right\} dx. \quad (3.3.6)$$

这就是计算二重积分的一般公式.

同样, 若 D 是由直线 $y = c$ 、 $y = d$ ($c < d$) 与曲线 $x = \chi(y)$ 、 $x = \omega(y)$ ($\chi(y) \leq \omega(y)$) 围成, 见图 3.3.4, 亦即

$$D = \{(x, y) : \chi(y) \leq x \leq \omega(y), c \leq y \leq d\}.$$

用类似的讨论便得到二重积分的另一个计算公式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left\{ \int_{\chi(y)}^{\omega(y)} f(x, y) dx \right\} dy. \quad (3.3.7)$$

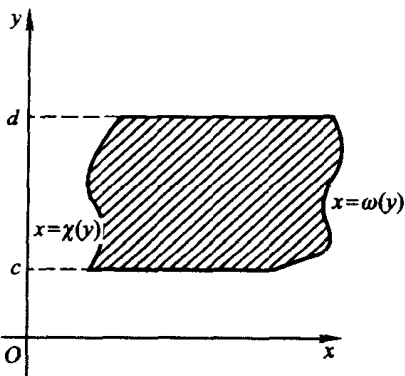


图 3.3.4

公式 (3.3.6) 与 (3.3.7) 是计算二重积分关于积分变量 x 与 y 的两种不同顺序的累次积分. 如果区域 D 的形状比较复杂, 则可用平行于坐标轴的直线把 D 分成若干个形如 (3.3.3) 和 (3.3.7) 的子区域, 然后分别使用公式 (3.3.6) 和 (3.3.7) 来计算.

例 1 计算 $I = \iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 为由曲线 $x = \sqrt{y}$ 、 $x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$ 及直线 $y=1$ 所围成的平面区域, 见图 3.3.5.

解 将 D 写为

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{1}{2}\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1 \right\},$$

于是,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left\{ \int_{\frac{1}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x+y) dx \right\} dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + yx \right]_{\frac{1}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y + y\sqrt{y} - \frac{1}{8}y - \frac{1}{2}y\sqrt{y} \right) dy = \frac{31}{80}.
 \end{aligned}$$

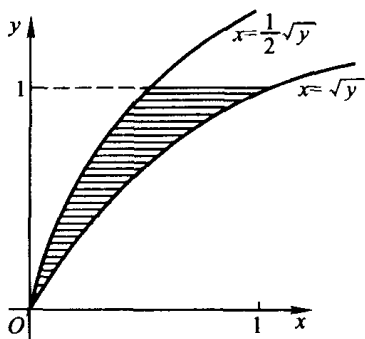


图 3.3.5

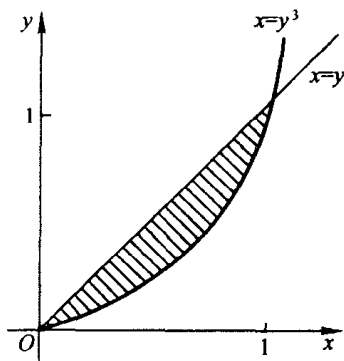


图 3.3.6

例 2 计算 $I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \exp\left(\frac{1}{2}y^2\right) dy$.

解 因为函数 $\exp\left(\frac{1}{2}y^2\right)$ 的原函数不是初等函数,用题目要求的积分顺序无法求积分,我们可以用交换积分次序的方法求积分值.由图 3.3.6 可得

$$\begin{aligned}
 D &= \{(x, y): x \leq y \leq \sqrt[3]{x}, 0 \leq x \leq 1\} \\
 &= \{(x, y): y^3 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}.
 \end{aligned}$$

于是

$$I = \int_0^1 dy \int_{y^3}^y \exp\left(\frac{1}{2}y^2\right) dx = \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2}y^2\right) (y - y^3) dy.$$

作变量代换 $u = \frac{1}{2}y^2$, 且 $y=0, 1$ 分别对应于 $u=0, \frac{1}{2}$, 故

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^u (1 - 2u) du = [3e^u - 2ue^u]_0^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e} - 3.$$

例 3 设 $f(x)$ 为 $[0, a]$ 上的连续函数, 求证

$$\int_0^a \int_0^x f(x)f(y) dy dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^a f(x) dx \right\}^2.$$

解 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $F'(x) = f(x)$, $F(0) = 0$. 于是

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \int_0^x f(x)f(y) dy dx &= \int_0^a f(x) dx \int_0^x f(y) dy = \int_0^a f(x) F(x) dx \\
 &= \int_0^a F(x) dF(x) = \frac{1}{2} F^2(a) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^a f(x) dx \right\}^2.
 \end{aligned}$$

2. 在极坐标系下二重积分的计算

在极坐标系下计算二重积分是经常使用的方法.

设二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的积分区域 D 是极坐标系下由曲线 $r = r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$ 与矢径 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围成的, 其中 $\alpha < \beta, r_1(\theta) < r_2(\theta)$, 见图 3.3.7, 而积分区域 D 可表示为

$$D = \{(r, \theta) : r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

我们用“微元法”来二重积分的定义, 并求积分的值(读者将看到, “微元法”实际上就是前面引进黎曼积分、二重积分的“细分取近似、求和取极限”步骤的简化).

对于自变量 r, θ , 取增量 $\Delta r, \Delta \theta$, 分别作半径为 $r, r + \Delta r$ 的圆周与极角为 $\theta, \theta + \Delta \theta$ 的

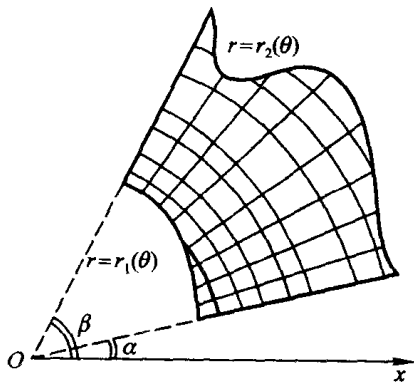


图 3.3.7

矢径, 所围成的小区域(小扇形)的面积记为 $\Delta\sigma$. 由扇形面积公式, 有

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}r^2 \Delta\theta = r\Delta r\Delta\theta + \frac{1}{2}\Delta r^2 \Delta\theta.$$

当 $r \neq 0, \Delta r \rightarrow 0, \Delta\theta \rightarrow 0$ 时, 上式右边第一项是 $\Delta r\Delta\theta$ 的线性部分, 第二项是 $\Delta r\Delta\theta$ 的高阶无穷小, 故得 $\Delta\sigma \sim r\Delta r\Delta\theta$, 这说明二重积分中的面积元素化为 $d\sigma = r dr d\theta$, 被积函数则化为 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. 所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

为计算极坐标下的二重积分, 也可以利用定理 3.3.2 化为累次积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr. \quad (3.3.8)$$

例 4 计算二重积分 $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $x^2 + y^2 = 2x$ 所围成的平面区域, 见图 3.3.8.

解 用直角坐标系计算此题很麻烦, 我们采用极坐标. 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则 D 的边界化为 $r = 2\cos\theta$. 于是积分区域可写为

$$D = \left\{ (r, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\theta \right\},$$

而被积函数化为 $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, 故

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{32}{9}.$$

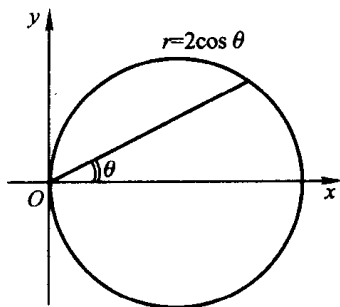


图 3.3.8

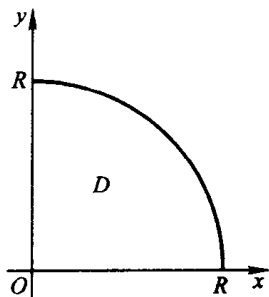


图 3.3.9

例 5 计算二重积分 $I = \iint_D e^{-x^2-y^2} d\sigma$, 其中 D 是区域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 位于第一象限的部分, R 为正常数, 见图 3.3.9.

解 本题也不适合用直角坐标系, 应采用极坐标系: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 得

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{4} \int_0^R e^{-r^2} d(r^2) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

3.3.3 二重积分换元积分法

3.3.2 节中所用的极坐标表示是本节换元积分法的特殊情形, 即通过换元法把自变量 x, y 换为 r, θ . 一般情形下, 二重积分换元法有如下定理.

定理 3.3.3 (换元积分法) 设函数 $f(x, y)$ 在 xOy 平面的有界闭区域 D 上连续, 又设函数组

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

在 uv 平面的有界闭区域 D' 上连续、可微, 而且使得 D' 中的点 (u, v) 与 D 中的点 (x, y) 一一对应, 函数 φ 与 ψ 的雅可比行列式不为 0,

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in D',$$

则有二重积分的换元积分公式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv, \quad (3.3.9)$$

其中 $d\sigma = |J(u, v)| du dv$ 称为曲线坐标下的面积元素, $|J(u, v)|$ 是雅可比行列式 $J(u, v)$ 的绝对值.

此定理的证明从略.

公式(3.3.8)是公式(3.3.9)在极坐标情形下的特例.

例 6 计算二重积分 $I = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy$, 其中 D 是椭圆域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, 见图 3.3.10.

解 采用广义极坐标

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta, \\ y = b\rho \sin \theta, \end{cases}$$

则 D 在广义极坐标下化为

$$D' = \{(\rho, \theta): 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

且雅可比行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\rho,$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} (1 - a^2 \rho^2 \cos^2 \theta - b^2 \rho^2 \sin^2 \theta) ab\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - a^2 \rho^2 \cos^2 \theta - b^2 \rho^2 \sin^2 \theta) ab\rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 a^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{4} b^2 \sin^2 \theta \right\}_0^1 d\theta \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{a^2}{2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{2} \sin^2 \theta \right) d\theta \\ &= ab\pi \left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right). \end{aligned}$$

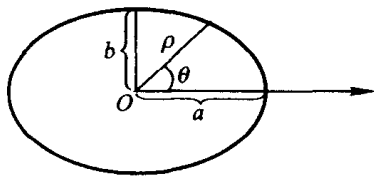


图 3.3.10

例 7 计算二重积分 $I = \iint_D \exp\left\{\frac{y-x}{y+x}\right\} dx dy$, 其中 D 是直线 $y = x, y = 0, y + x = 1$ 所围成的区域.

解法 1 取新变元 u, v :

$$x + y = u, \quad y = vx,$$

积分区域 D 化为 uv 平面上的矩形区域 D' :

$$D' = \{(u, v): 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\},$$

且雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ v & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2},$$

于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \exp\left\{\frac{v-1}{v+1}\right\} \frac{u}{(1+v)^2} du dv \\
 &= \int_0^1 u du \int_0^1 \exp\left\{\frac{v-1}{v+1}\right\} \frac{1}{(1+v)^2} dv \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 \exp\left\{1 - \frac{2}{v+1}\right\} d\left(\frac{-2}{1+v}\right) \\
 &= \frac{1}{4} \exp\left\{1 - \frac{2}{v+1}\right\} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e}\right).
 \end{aligned}$$

解法 2 取新变元 s, t :

$$x - y = s, \quad x + y = t,$$

积分区域 D 化为 st 平面上的矩形区域 D' :

$$D' = \{(s, t) : 0 \leq s \leq t, 0 \leq t \leq 1\},$$

且雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \frac{1}{\frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D'} e^{-\frac{s}{t}} \frac{1}{2} ds dt = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_0^t e^{-\frac{s}{t}} ds = \frac{1}{2} \int_0^1 (-t) e^{-\frac{s}{t}} \Big|_0^t dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 t \left(\frac{1}{e} - 1\right) dt = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e}\right).
 \end{aligned}$$

3.3.4 三重积分及多重积分

本章前三节详细地讨论了二重积分,本节将简略介绍三重积分与多重积分.

1. 三重积分的定义

二重积分是从求空间曲顶柱体 Ω 的体积问题引入的.对三重积分,我们从一个物理问题出发.设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为空间中的有界闭立体, Ω 的质量分布不均匀,其密度函数为 $\mu(x, y, z)$,试求空间立体 Ω 的质量 $m(\Omega)$.

仍然使用定积分和二重积分引入的方法“细分取近似,求和取极限”.

用“分法” r 把立体 Ω 分成 n 个小立体

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_n,$$

并把 Ω_i 的体积记为 $\Delta V_i, i = 1, 2, \dots, n$, 把 $d_i \equiv \sup\{d(x, y) : x, y \in \Omega_i\}$ 称为 Ω_i 的直径.又记

$$\lambda = \max\{d_i : i = 1, 2, \dots, n\},$$

称 λ 为分法 r 的模.

为求小立体 Ω_i 的质量,在 Ω_i 中任取一点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Omega_i$,于是 Ω_i 质量的

近似值为 $m_i = \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$. 这样我们可以得到立体 Ω 的质量近似值

$$m(\Omega) \sim \sum_{i=1}^n m_i \equiv \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

让分法 r 的模 $\lambda \rightarrow 0$, 如果极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

存在、有限, 则它就是 Ω 的质量 $m(\Omega)$, 并记为

$$m(\Omega) = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV.$$

于是, 可抽象地给出三重积分的定义.

定义 3.3.2 (三重积分) 设三元函数 $w = f(x, y, z)$ 在空间 $\mathbb{R}^3$ 的有界闭立体 Ω 中定义, 任取一个分法 r , 将 Ω 分为 n 个小立体

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Ω_i 的体积记为 $\Delta V_i, i = 1, 2, \dots, n$, 直径记为 $d_i \equiv \sup\{d(P, Q) : P, Q \in \Omega_i\}$, 模记为 $\lambda = \max\{d_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. 在每个小立体 Ω_i 中任取一点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Omega_i$, 作和式

$$\sum_{i=1}^n m_i \equiv \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

让分法 r 的模 $\lambda \rightarrow 0$, 如果极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i \quad (3.3.10)$$

存在、有限, 并且与分法 r 及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关, 则称此极限为函数 $w = f(x, y, z)$ 在 Ω 上的三重积分, 记为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i, \quad (3.3.11)$$

称函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上黎曼(三重)可积, 简称可积. $f(x, y, z)$ 称为被积函数, Ω 称为积分区域, dV 称为体积元. 在直角坐标下, 体积元也可记为 $dx dy dz$.

可以证明, 当函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭立体 Ω 上连续时, $f(x, y, z)$ 在 Ω 上必可积.

但在引入三重积分时, 我们还可以采用上述方法的简化, 称为“无穷小元素法”, 或“微元法”. 具体作法如下:

为求空间 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭立体 Ω 的质量, 在 Ω 中任取一个小的体积微元, 记为 ΔV , 由于它是一个微元, 可近似地把它的质量分布视为是均匀的, 密度为 $\mu(x, y, z)$, 其中 (x, y, z) 是 ΔV 中的一个点. 如果把 ΔV 的质量表示为 Δm , 则

$$\Delta m = \mu(x, y, z) \Delta V,$$

而 Ω 的质量应为

$$m(\Omega) = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

以后我们还会再用微元法来解决类似的问题.

关于三重积分的性质,与二重积分类似,这里不再赘述.

2. 在直角坐标系下三重积分的计算

为计算三重积分(3.3.11),我们在直角坐标系中进行,并且试用微元法来求.

为简化起见,设

$$\Omega = \{(x, y, z) : z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}, \quad (3.3.12)$$

曲面 $z = z_1(x, y)$ 与 $z = z_2(x, y)$ 形成 Ω 的边界,区域 $D_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ 是 Ω 在 xOy 平面上的投影(也就是曲面 $z = z_1(x, y)$ 与 $z = z_2(x, y)$ 的投影的并集),见图 3.3.11,其中 Ω_i 为体积微元,它在 xOy 平面上的投影为 D_i ,取 $(x_i, y_i) \in D_i$,记 $h_2 = (x_i, y_i, z_2)$ 、 $h_1 = (x_i, y_i, z_1)$.

下面我们总假设 $z = z_1(x, y)$ 与 $z = z_2(x, y)$ 在 D_{xy} 上连续,并且过 D_{xy} 的任意内点 $P_0 = (x_0, y_0, 0)$ 作平行于 Oz 轴的直线与 Ω 的边界至多相交两点,并分别位于曲面 $z = z_1(x, y)$ 与 $z = z_2(x, y)$ 上.

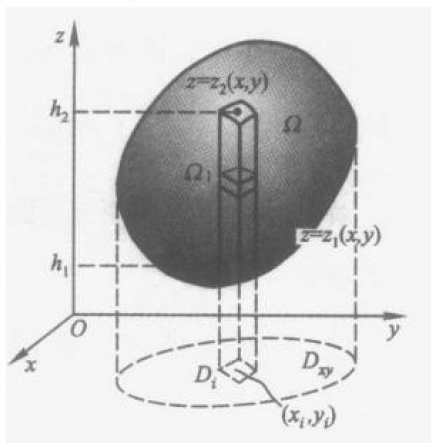


图 3.3.11

定理 3.3.4(三重积分计算公式) 设定义

在空间立体 Ω 上的函数 $f(x, y, z)$ 的三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ 存在, Ω 可写为(3.3.12)的形式. 又对于任意的 $(x, y) \in D_{xy}$, 二重积分

$$J(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (3.3.13)$$

存在, 则累次积分

$$\iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dx dy \quad (3.3.14)$$

存在, 并且成立公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dx dy. \quad (3.3.15)$$

这就是三重积分的计算公式.

类似的推导可以得到三重积分的另一种计算公式:当

$$\Omega = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, (y, z) \in D_{yz}\} \quad (3.3.16)$$

时,有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \iint_{D_{yz}} f(x, y, z) dy dz. \quad (3.3.17)$$

而当

$$\Omega = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\} \quad (3.3.18)$$

时,我们有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (3.3.19)$$

例 8 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $x=0, y=0, z=0$ 与 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 所围成的立体.

解 立体 Ω 介于两个平面 $z_1=0, z_2=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$ 之间, 它在 xOy 平面上的投影为

$$D_{xy} = \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\left(1-\frac{x}{a}\right) \right\},$$

并且

$$\Omega = \left\{ (x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\left(1-\frac{x}{a}\right), 0 \leq z \leq c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) \right\}.$$

见图 3.3.12 应用公式(3.3.19), 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} x dz = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} cx \left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) dy \\ &= \int_0^a cx \left[\left(1-\frac{x}{a}\right)b\left(1-\frac{x}{a}\right) - \frac{b}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 \right] dx \\ &= \frac{bc}{2} \int_0^a x \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{a^2 bc}{24}. \end{aligned}$$

例 9 计算累次积分 $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y \frac{\sin z}{1-z} dz$.

解 由于被积函数关于 z 的原函数不是初等函数, 为此我们用交换累次积分顺序的方法, 把对 z 的积分交换到最外层.

先把累次积分化为三重积分. 根据累次积分的上、下限, 可写出

$$0 \leq z \leq y, \quad 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

见图 3.3.13.

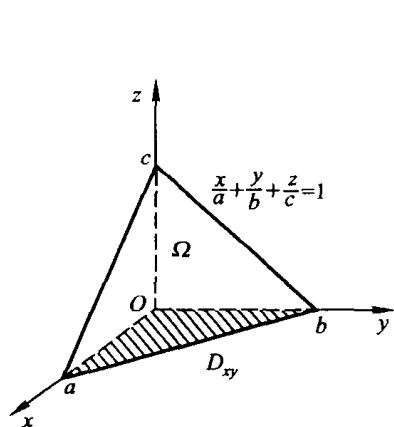


图 3.3.12

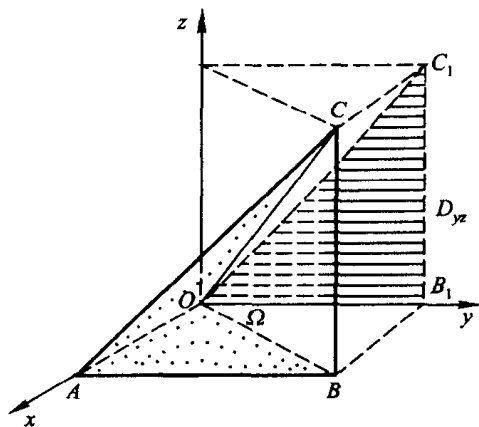


图 3.3.13

所以积分区域 Ω 是四面体 $O-ABC$, 它是由

$$z=0, \quad z=y, \quad y=x, \quad x=1$$

所围成的立体. Ω 在 yOz 平面上的投影 D_{yz} 为三角形区域 C_1OB_1

$$D_{yz} = \{(y, z) : z \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1\},$$

并且有

$$\Omega = \{(x, y, z) : y \leq x \leq 1, \quad z \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1\},$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \frac{\sin z}{1-z} dz dy dx = \iint_{D_{yz}} dy dz \int_y^1 \frac{\sin z}{1-z} dx \\ &= \iint_{D_{yz}} (1-y) \frac{\sin z}{1-z} dy dz = \int_0^1 dz \int_x^1 (1-y) \frac{\sin z}{1-z} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\sin z}{1-z} \frac{1}{2} (1-z) dz = \frac{1}{2} (z-1) \cos z \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos z dz \\ &= \frac{1}{2} (1 - \sin 1). \end{aligned}$$

3. 三重积分的换元积分公式

类似于二元情形, 我们有

定理 3.3.5 (三重积分换元积分公式) 设函数 $f(x, y, z)$ 在 $Oxyz$ 空间的有界闭区域 Ω 上连续, 函数组

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w), \\ y = \psi(u, v, w), \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases}$$

在空间 uvw 的有界闭区域 Ω' 上连续可微,使得 Ω 与 Ω' 的点一一对应,并且雅可比行列式

$$J(u, v, w) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v, w) \in \Omega',$$

则有三重积分的换元积分公式

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \\ &= \iiint_{\Omega'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw, \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

其中 $dV = |J(u, v, w)| du dv dw$ 称为新变元下的体积元素, $|J(u, v, w)|$ 是雅可比行列式 $J(u, v, w)$ 的绝对值.

三重积分的用途广泛,但计算较二重情形复杂,主要是在计算时所遇到的立体图形有相当的复杂性,因此借助于立体的图形来分析积分区域就显得十分重要.另一方面,作三重积分的变量代换,设法把积分区域化简,才能顺利地进行计算.

(1) 柱坐标变换

先介绍空间中的柱坐标系.取空间的直角坐标系 $Oxyz$,设点 M 的直角坐标为 (x, y, z) .由 (x, y, z) 可以得到另外三个数的有序数组 (ρ, θ, z) ,其中 (ρ, θ) 是点 M 在 xOy 平面上的投影 P 的极坐标, z 是 M 的直角坐标的第 3 个分量.我们把 (ρ, θ, z) 称为 M 的柱坐标,集合

$$\{(\rho, \theta, z): 0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$$

与 $\mathbf{R}^3$ 中的点是一一对应的,于是我们建立了三维空间中点的柱坐标系,见图 3.3.14.

$\rho = \rho_0$ 在直角坐标系中是以 z 轴为对称轴、 ρ_0 为半径的圆柱面; $\theta = \theta_0$ 是以 z 轴为边界、垂直于 xOy 平面的半平面; $z = z_0$ 是在 z 轴上的截距为 z_0 、平行于 xOy 平面的平面.

点 M 的直角坐标 (x, y, z) 与其柱坐标 (ρ, θ, z) 之间的关系是

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad (3.3.21)$$

此式称为柱坐标变换,其雅可比行列式为

$$J(\rho, \theta, z) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

于是得到柱坐标下的换元积分公式

$$\iiint_n f(x, y, z) dV = \iiint_n f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz, \quad (3.3.22)$$

其中 $dV = \rho d\rho d\theta dz$ 称为柱坐标下的体积元.

当被积函数或积分区域的方程中含有 $x^2 + y^2$ 项时, 采用柱坐标往往比较简便.

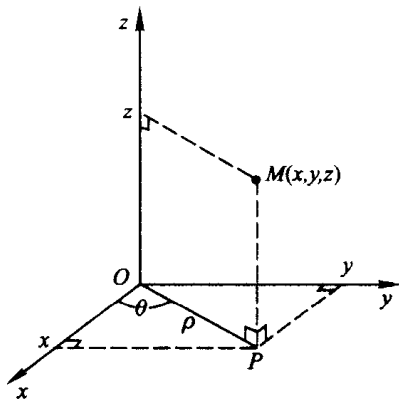


图 3.3.14

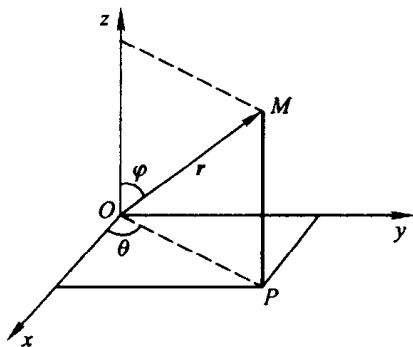


图 3.3.15

(2) 球坐标变换

类似于柱坐标系, 我们可以在空间中建立球坐标系.

取空间的直角坐标系 $Oxyz$, 设点 M 的直角坐标为 (x, y, z) . 由 (x, y, z) 可以得到另外三个数的有序数组 (r, φ, θ) , 其中 r 是向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模, φ 是它与 Oz 轴的夹角, θ 是点 M 在 xOy 平面上投影 P 的极角, 见图 3.3.15.

把 (r, φ, θ) 称为 M 的球坐标, 集合

$$\{(r, \varphi, \theta) : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

与 $\mathbf{R}^3$ 中的点是一一对应的, 于是我们建立了三维空间中点的球坐标系.

$r = r_0$ 在直角坐标系中是以 r_0 为半径、 $(0, 0, 0)$ 为圆心的球面; $\varphi = \varphi_0$ 是以 $(0, 0, 0)$ 为顶点、半顶角为 φ_0 的圆锥面; $\theta = \theta_0$ 是以 z 轴为边界、垂直于 xOy 平面的半平面.

点 M 的直角坐标 (x, y, z) 与其球坐标 (r, φ, θ) 之间的关系是

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi, \end{cases} \quad (3.3.23)$$

此式称为球坐标变换,雅可比行列式为

$$J(r, \varphi, \theta) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \sin \varphi.$$

这样,我们得到球坐标下的换元积分公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega'} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta, \quad (3.3.24)$$

其中 Ω' 是在球坐标变换下 Ω 所对应的区域, $dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$ 称为球坐标下的体积元.

当被积函数或积分区域的方程中含有 $x^2 + y^2 + z^2$ 项时,采用球坐标往往比较简便.

例 10 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 = 2x, z = 0, z = h$ 所围成的立体, 见图 3.3.16.

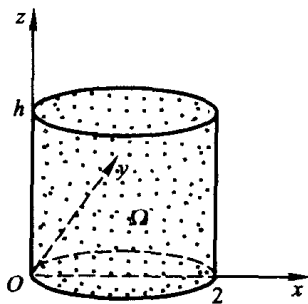


图 3.3.16

解 用柱坐标变换(3.3.21), Ω 化为

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \theta, z) : 0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

应用公式(3.3.22)得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega'} \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 \cos \theta d\rho \int_0^h dz \\ &= \frac{8h}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{16h}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos 4\theta \right) d\theta = \pi h. \end{aligned}$$

例 11 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 = z, z = h^2$ 所围成的立体, 见图 3.3.17.

解 也采用柱坐标变换(3.3.21), 但我们将 Ω' 上的三重积分化为两种积分次序来解.

解法 1 先对 z 积分, Ω 化为

$$\Omega' = \{ (\rho, \theta, z) : \rho^2 \leq z \leq h^2, \quad 0 \leq \rho \leq h, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \},$$

应用公式(3.3.22)得

$$I = \iiint_{\Omega'} z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{h^2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} \rho d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^h \left(\frac{h^4}{2} - \frac{\rho^4}{2} \right) d\rho = \frac{1}{3} \pi h^6.$$

解法 2 最后对 z 积分, Ω 化为

$$\Omega' = \{(\rho, \theta, z): 0 \leq \rho \leq \sqrt{z}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h^2\},$$

应用公式(3.3.22)得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega'} z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{h^2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} z \rho d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{h^2} z \left(\frac{\rho^2}{2} \right)_0^{\sqrt{z}} dz = \pi \int_0^{h^2} z^2 dz = \frac{1}{3} \pi h^6. \end{aligned}$$

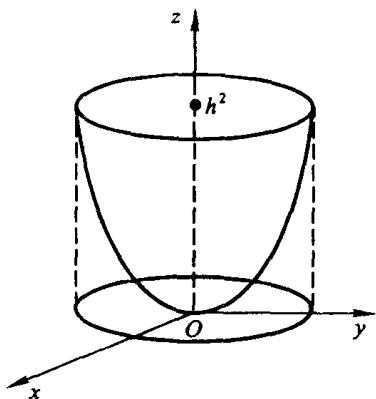


图 3.3.17

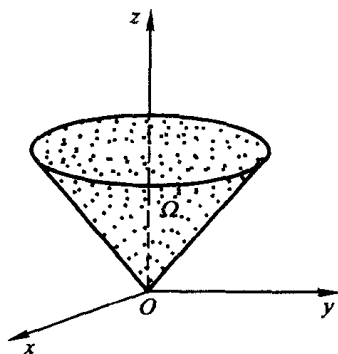


图 3.3.18

例 12 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$ 所围成的立体, 见图 3.3.18.

解 此时采用球坐标变换(3.3.23), 得

$$\Omega' = \{(r, \varphi, \theta): 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

应用公式(3.3.24)得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega'} r \cos \varphi r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^a r^3 dr = 2\pi \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^a = \frac{1}{8} \pi a^4. \end{aligned}$$

例 13 设 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$, 计算极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} I(t)$$

其中

$$I(t) = \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz.$$

这里的函数 f 连续可微, 且 $f(0) = 0$.

解 显然采用球坐标变换(3.3.23)时, Ω 化为

$$\Omega' = \{(r, \varphi, \theta) : 0 \leq r \leq t, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

于是

$$\begin{aligned} I(t) &= \iiint_{\Omega'} f(r) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^t r^2 f(r) dr \\ &= 4\pi \int_0^t r^2 f(r) dr. \end{aligned}$$

应用洛必达法则求极限

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} I(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4\pi \int_0^t r^2 f(r) dr}{\pi t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^2 f(t)}{4\pi t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \\ &= f'(0). \end{aligned}$$

当被积函数或积分区域是其他形式时, 我们也可以用其他的变量代换.

例 14 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

解 取广义球坐标变换

$$\begin{cases} x = ar \sin \varphi \cos \theta, \\ y = br \sin \varphi \sin \theta, \\ z = cr \cos \varphi, \end{cases}$$

积分区域 Ω 化为

$$\Omega' = \{(r, \varphi, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

雅可比行列式为

$$J(r, \varphi, \theta) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = abcr^2 \sin \varphi.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega'} c^2 r^2 \cos^2 \varphi \cdot abcr^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= abc^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4\pi}{15} abc^3. \end{aligned}$$

例 15 求六个平面

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \pm h_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = \pm h_2, \quad \Delta = |(a_{ij})| \neq 0,$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \pm h_3,$$

所围成的平行六面体 Ω 的体积.

解 取如下的变量代换

$$\begin{cases} u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases}$$

则平行六面体 Ω 化为

$$\Omega' = \{(u, v, w) : -h_1 \leq u \leq h_1, \quad -h_2 \leq v \leq h_2, \quad -h_3 \leq w \leq h_3\},$$

雅可比行列式为

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}} = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|^{-1} = \frac{1}{\Delta}.$$

于是

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \frac{1}{\Delta} dx dy dz = \frac{1}{\Delta} \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} dw \\ &= \frac{8}{\Delta} h_1 h_2 h_3. \end{aligned}$$

习 题

1. 设函数 $f(x, y)$ 在 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 上连续, 试求

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D f(x, y) dx dy.$$

2. 计算下列累次积分

$$(1) \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y) dx$$

计算下列(3—7)二重积分

$$3. \iint_D (\sin x + \cos y) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$4. \iint_D (x^2 + y) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } y \geq x^2, y^2 \leq x.$$

$$5. \iint_D xy^2 dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } y^2 \leq 2px, x \leq p (p > 0).$$

$$6. \iint_D (x+y) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } x^2 + y^2 \leq 2y.$$

$$7. \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } y = x, x = y^2 \text{ 所围区域}.$$

8. 改变下列累次积分的顺序

$$(1) \int_0^u dx \int_0^{\pi} f(y) dy.$$

$$(2) \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy.$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} f(x, y) dy.$$

$$(4) \int_0^1 dy \int_{1-y}^{1+y} f(x, y) dx.$$

9. 计算下列累次积分

$$(1) \int_0^1 dy \int_y^1 \sin x^2 dx.$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_x^u e^{-y^2} dy.$$

10. 将二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化为极坐标下的累次积分, 其中区域 D 分别为

$$(1) x^2 + y^2 \leq R^2 \quad (x \geq 0)$$

$$(2) x^2 + y^2 \leq R^2 \quad (y \geq 0)$$

$$(3) x^2 + y^2 \leq ax \quad (a > 0)$$

$$(4) x^2 + y^2 \leq ay \quad (a > 0)$$

$$(5) x^2 + y^2 \leq 2x \quad (y \geq x^2)$$

计算下列(11—13)二重积分:

$$11. \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } x^2 + y^2 \leq R^2.$$

$$12. \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2.$$

$$13. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } x^2 + y^2 \leq 2ax \quad (a > 0).$$

$$14. \text{ 计算 } \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

$$15. \text{ 将极坐标下的累次积分 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^a \rho^2 d\rho \text{ 化为直角坐标下的累次积分(两种顺序).}$$

$$16. \text{ 计算 } \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

$$17. \text{ 计算 } \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

18. 变换 $x = u + v, y = u - v$ 将 xOy 平面上的闭域 $D: 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1$, 化为 uv 平面上的区域 D_1 , 写出 D_1 的表示式, 并画出 D 与 D_1 的图形.

19. 求四条曲线 $y^2 = px, y^2 = qx, x^2 = ay, x^2 = by$ ($0 < p < q, 0 < a < b$) 所围区域的面积.

20. 求由抛物线 $y^2 = ax, y^2 = bx$ ($0 < a < b$) 与双曲线 $xy = a, xy = \beta$ ($0 < a < \beta$) 所围区域的面积.

21. 求极坐标下第一象限内的四条曲线 $\rho = 1, \rho = \sqrt{3}, \rho = \tan \theta, \rho = \tan 2\theta$ 所围区域的面积.

$$22. \text{ 计算 } \int_1^2 dx \int_1^2 dy \int_1^{\frac{x}{y}} x^2 y^3 \sin z dz.$$

$$23. \text{ 计算 } \int_{-1}^1 dz \int_0^x dy \int_{y-x}^{y+x} (x + y + z) dx.$$

24. 将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为适当顺序的累次积分, 其中区域 Ω 分别为:

(1) $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H$

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, 0 \leq z \leq c$

(3) $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$

(4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

(5) 由 $x^2 + y^2 = z, y = x^2, y = 1, z = 0$ 所围立体.

25. $\iiint_{\Omega} x^2 y^2 z dx dy dz$, 其中 Ω 为 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$.

26. $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}$, 其中 Ω 为由 $x + y + z = 1$ 与坐标平面所围成立体.

27. $\iiint_{\Omega} x^3 y^2 z dx dy dz$, 其中 Ω 为由 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 所围立体.

28. $\iiint_{\Omega} xy dx dy dz$, 其中 Ω 为由 $z = xy, y + x = 1, z = 0$ 所围立体.

29. $\iiint_{\Omega} \frac{y \sin x}{x} dx dy dz$, 其中 Ω 为由 $y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, x + z = \frac{\pi}{2}$ 所围立体.

30. 将累次积分 $\int_0^u dx \int_0^x dy \int_0^y f(z) dz$ 化为定积分的形式.

31. 求下列广义柱坐标变换与广义球坐标变换的雅可比行列式:

(1) $x = a \rho \cos \alpha, y = b \rho \sin \alpha, z = z$

(2) $x = a r \sin \varphi \cos \theta, y = b r \sin \varphi \sin \theta, z = c r \cos \varphi$

计算下列(32—37)三重积分

32. $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 \leq 2z, z \leq 2$.

33. $\iiint_{\Omega} dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz, x^2 + y^2 \leq z^2$.

34. $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, x \geq 0, y \geq 0$.

35. $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

36. $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

37. $\iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, 其中 Ω 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

38. 变换为球坐标计算 $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz$.

求下列曲面(39—43)所围立体的体积(a, b, c 为正常数):

39. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

40. $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$.

41. $z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2), y^2 = 4ax, x^2 = \frac{a}{2}y, z = 0$.
42. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (x \geq 0), x^2 + y^2 = ax$.
43. $x^2 + y^2 = 2ax, z^2 = 2ax$.
44. 求上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 在柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部分曲面的面积.
45. 求曲面 $z = xy$ 位于 $x^2 + y^2 = a^2$ 内部分曲面的面积.
46. 求曲面 $x^2 + y^2 = a^2$ 位于 $x^2 + z^2 = a^2$ 内部分曲面的面积.
47. 求曲面 $x^2 + y^2 = ax$ 位于 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内部分曲面的面积.
48. 求曲线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, 绕 Ox 轴与 Oy 轴旋转所得旋转面的面积, 其中 $a > 0$.
49. 求曲线 $r = a(1 + \cos \varphi)$ 绕极轴旋转所得旋转面的面积, 其中 $a > 0$.
50. 求曲线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 绕 $y = x$ 旋转所得旋转面的面积, 其中 $a > 0$.

§ 3.4 曲线积分、曲面积分

曲线积分、曲面积分是定积分与重积分的发展, 它们有诸多的实际背景与广泛应用.

3.4.1 第一型曲线积分定义、性质、计算公式

1. 第一型曲线积分的定义

从一个几何问题与一个物理问题出发来引入第一型曲线积分.

设 l 是平面 $\mathbf{R}^2$ 中以 A, B 为端点的曲线, 其质量是不均匀分布的, 分布密度函数为 $\mu(x, y)$. 今欲求该曲线的弧长与质量. 见图 3.4.1.

解决此问题的思路仍然是“细分取近似, 求和取极限”.

(1) 求曲线 l 的弧长 s

假设 l 的参数式为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq T,$$

并设 φ, ψ 连续. 任给 l 上的一组分点

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B,$$

它们分别对应于参数

$$t_0, t_1, \dots, t_n = T,$$

称为 l 的一个分法 r . 从 A 点起, 依次用这组分点将曲线 l 分为 n 个小弧段, 第 i 个弧段 l_i 的端点为 A_{i-1} 与 A_i , 而对应此小弧段的线段为

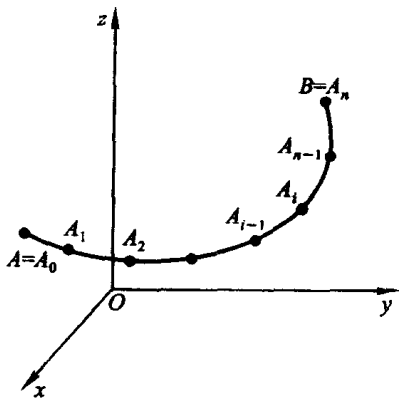


图 3.4.1

$\overline{A_{i-1}A_i}$. 令

$$\lambda = \max \{d_i : i = 1, 2, \dots, n\},$$

称 λ 为分法的模, 其中 d_i 是 l_i 的直径 $d_i = \max\{|PQ| : P, Q \in l_i\}$, 这里 $|PQ|$ 是点 $P(x_1, y_1)$ 与点 $Q(x_2, y_2)$ 之间的距离

$$|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

我们用线段 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 的长度 $|\overline{A_{i-1}A_i}| = \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}$

近似代替小弧 l_i 的长度 Δs_i 并求和 $\sum_{i=1}^n |\overline{A_{i-1}A_i}|$, 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 此和的极限

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{A_{i-1}A_i}|$$

存在, 且 s 为有限数, 则称 l 为可求长曲线, s 称为 l 的长度.

我们给出可求长曲线的一个充分条件, 并推导其的长度公式.

假设曲线 l 的参数式中 $\varphi(t)$ 、 $\psi(t)$ 为 $[t_0, T]$ 上的连续可微函数, 即 $\varphi'(t)$ 、 $\psi'(t)$ 在 $[t_0, T]$ 上连续. 对于分法 r , 假设 $\Delta t_i \neq 0$, 于是,

$$\Delta s_i \approx \sqrt{\left[\frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right]^2 + \left[\frac{\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right]^2} \Delta t_i,$$

在上式中令 $\lambda \rightarrow 0$, 我们得到“弧微元” ds 的表示式

$$ds \equiv \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

为求弧长 s , 再对 Δs_i 求和, 得

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{\left[\frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right]^2 + \left[\frac{\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right]^2} \Delta t_i,$$

令 $\lambda \rightarrow 0$, 在关于 φ 、 ψ 的假设下, 上述和式的极限存在并有限, 从而曲线 l 的长度为

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \int_{t_0}^T \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

分别用弧微元 ds 与参数微元 dt 表示 l 的长度, 得到

$$s = \int_l ds = \int_{t_0}^T \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (3.4.1)$$

定义 3.4.1 (可求长曲线、光滑曲线) 假设平面曲线 l 的参数表示式为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3.4.2)$$

其中 $\varphi(t)$ 、 $\psi(t)$ 都是区间 $t_0 \leq t \leq T$ 上的连续可微函数, 即 $\varphi'(t)$ 、 $\psi'(t)$ 在

$[t_0, T]$ 上连续, 则称 l 为 $[t_0, T]$ 上的可求长曲线. 进而, 若 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 不同时为 0, 则称可求长曲线 l 为光滑曲线.

回忆 § 2.2.7 中曲线切线的定义及切线方程, 可知在光滑曲线的每一点上都有切线.

(2) 求曲线 l 的质量 m

假设曲线 l 的密度函数为 $\mu(x, y)$, 现在来求 l 的质量.

依照上面求弧长的思路, 并采用同样的记号, 在弧段 l_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$, 以 M_i 的密度近似地代替弧段 l_i 的平均密度, 则 l_i 的质量近似地等于

$$\Delta m_i = \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

整个曲线 l 的质量 m 的近似值为

$$m \approx \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

令 $\lambda \rightarrow 0$, 在我们的假设下, 上述和式的极限存在并有限, 它就是曲线 l 的质量

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

把上面求曲线 l 长度和密度问题抽象化, 便引出第一型曲线积分的概念.

定义 3.4.2 (第一型曲线积分) 设 l 为平面 $\mathbf{R}^2$ 中以 A, B 为端点的可求长曲线, $f(x, y)$ 是定义在 l 上的函数. 任给 l 上的一组分点

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$$

将曲线 l 分为 n 个弧段 l_i , 第 i 个弧段 l_i 的端点为 A_{i-1} 与 A_i , Δs_i 为该弧段的弧长.

同样令 d_i 为 l_i 的直径, $\lambda = \max\{d_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ 为分法的模. 在 l_i 上任意取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$, 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上述和式的极限存在并有限, 则称它为函数 $f(x, y)$ 在曲线 l 上的第一型曲线积分, 记为

$$\int_l f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

为了标明 l 的起点和终点, 也把积分第一型曲线积分记为

$$\int_l f(x, y) ds = \int_{AB} f(x, y) ds. \quad (3.4.3)$$

称 $f(x, y)$ 为被积函数, l 为积分路径, ds 为弧微元 (或称为弧长元素).

同样, 我们可以定义三元函数 $f(x, y, z)$ 沿空间 $\mathbf{R}^3$ 中的曲线 l 的第一型曲线积分

$$\int_l f(x, y, z) ds = \int_{AB} f(x, y, z) ds \quad (3.4.4)$$

2. 第一型曲线积分的性质与计算公式

由积分的定义可知,第一型曲线积分与沿曲线从 A 到 B ,还是从 B 到 A 的方向无关,即

$$\int_l f(x, y) ds = \int_{AB} f(x, y) ds = \int_{BA} f(x, y) ds. \quad (3.4.5)$$

三元函数 $f(x, y, z)$ 沿空间 $\mathbf{R}^3$ 中的曲线 l 的第一型曲线积分也有类似于 (3.4.5) 的公式,读者可自行写出.

定理 3.4.1 (第一型曲线积分计算公式) 设曲线 l 的方程由参数式给出

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq T,$$

并假设 φ, ψ 在区间 $[t_0, T]$ 上连续可微,又设函数 $f(x, y)$ 为定义在 l 上的连续函数.则 $f(x, y)$ 在 l 上的第一型曲线积分有如下计算公式

$$\int_l f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (3.4.6)$$

当曲线 l 的方程由显式

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

给出时,我们有

$$\int_l f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (3.4.7)$$

关于空间中的第一型曲线积分,也有类似于 (3.4.6) 的计算公式

$$\begin{aligned} & \int_l f(x, y, z) ds \\ &= \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

例 1 计算 $I = \int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = ay, a > 0$.

解 在极坐标系下,圆周 $x^2 + y^2 = ay$ 的方程为 $\rho = a \sin \theta$. 于是, Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta = a \sin \theta \cos \theta, \\ y = \rho(\theta) \sin \theta = a \sin \theta \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

由公式 (3.4.6) 得

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta} \sqrt{a^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2 + 4a^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \theta)} d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi a^2 \sin \theta d\theta = 2a^2.$$

例 2 求摆线的一拱

$$\Gamma: \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

绕 x 轴旋转一周所生成的旋转面的面积 S .

解 用微元法来解此问题. 在 Γ 上的点 (x, y) 处取弧长微元 ds , 因其纵坐标为 y , 故旋转后的面积微元为 $2\pi y ds$. 于是, 沿 Γ 取曲线积分, 得到旋转面的面积 A 由第一型曲线积分 $\int_\Gamma 2\pi y ds$ 表示. 利用公式 (3.4.6), 得

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

3.4.2 第二型曲线积分定义、性质、计算公式

1. 第二型曲线积分的定义

我们从另一个物理问题——变力做功出发, 引入空间第二型曲线积分.

假设空间光滑曲线 l 上的一个质点 $M(x, y, z)$ 在变力

$$F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

作用下沿曲线 l 由 A 移动到 B . 见图 3.4.2.

求此力所作的功.

同样采用“细分取近似, 求和取极限”的思路, 也利用对于第一型曲线积分同样的记号, 任给 l 上的一组分点

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B,$$

确定 l 的一个分法. 从 A 点起, 依次用这组分点将曲线 l 分为 n 个小弧段. 只要分法的模 λ 充分小, 当质点 M 在变力作用下通过第 i 个弧段 l_i 时, 我们便可以近似的认为它是沿着向量 $\overrightarrow{\Delta s_i} = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 的方向移动.

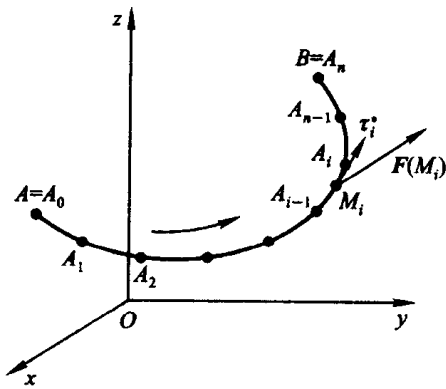


图 3.4.2

此时, 在第 i 个小弧段 l_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 并把变力的大小与方向近似的用点 M_i 对应的值 $F(M_i)$ 代替, 于是, 质点从 A_{i-1} 移动到 A_i 处, 力 F 作用的功近似地等于向量 $F(M_i)$ 与向量 $\overrightarrow{\Delta s_i}$ 的内积 $F(M_i) \cdot \overrightarrow{\Delta s_i}$. 这样, 力 F 将质点

从 A 沿着曲线 AB 移动到 B 所作的功 W 的近似值为 $W \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{\Delta s_i}$. 令 $\lambda \rightarrow 0$, 取极限得到

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{\Delta s_i},$$

若记 $\overrightarrow{\Delta s_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$, 且 $\mathbf{F}(M_i) = (P(M_i), Q(M_i), R(M_i))$, 于是 W 可表示成

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i + R(M_i) \Delta z_i].$$

上述类型的和式具有一般的意义和广泛的应用, 我们将其抽象成为一个重要的数学概念, 就是第二型曲线积分.

定义 3.4.3 (第二型曲线积分) 设 l 为空间 $\mathbf{R}^3$ 中以 A 与 B 为端点的可求长曲线, $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 是定义在 l 上的向量函数. 任给 l 上的一组分点

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$$

将曲线 l 分为 n 个弧段 l_i , 第 i 个小弧段 l_i 的端点为 $A_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ 与 $A_i(x_i, y_i, z_i)$, 并设 $\overrightarrow{\Delta s_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ 为该弧段上的弧向量, 且 $\Delta s_i = |\overrightarrow{\Delta s_i}|$.

同样令 d_i 为 l_i 的直径, $\lambda = \max\{d_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ 为分法的模. 在 l_i 上任意取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 作和式

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{\Delta s_i}.$$

如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上述和式的极限存在并有限, 则称它为函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在曲线 l 上的第二型曲线积分, 记为

$$\begin{aligned} \int_l \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{ds} &= \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + \\ &\quad R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i]. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

为了标明 l 的起点和终点, 也把积分第二型曲线积分记为

$$\int_l \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{AB} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{ds}.$$

称 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 为被积函数, l 为积分路径, $\overrightarrow{ds} = (dx, dy, dz)$ 为弧向量微元.

二元向量函数 $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ 沿平面 $\mathbf{R}^2$ 中的曲线 l 的第二型曲线积分是三元向量函数的第二型曲线积分的特例

$$\int_{AB} \mathbf{F}(x, y) \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

2. 第二型曲线积分的性质

由以上定义可知,第二型曲线积分有如下性质.

性质 1 第二型曲线积分与曲线 l 的方向有关

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{\widehat{BA}} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (3.4.10)$$

这是因为从 A 到 B 的积分改为从 B 到 A 的积分,弧向量微分 $\vec{ds}$ 的方向变为它的相反方向,因而积分值改变符号.

性质 2 设 $C \in AB$, 则对第二型曲线积分有

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_{\widehat{AC}} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{\widehat{CB}} Pdx + Qdy + Rdz. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

性质 3 对于第二型曲线积分,有

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\widehat{AB}} Pdx + \int_{\widehat{AB}} Qdy + \int_{\widehat{AB}} Rdz. \quad (3.4.12)$$

3. 第二型曲线积分的计算

下面讨论第二型曲线积分的计算.

定理 3.4.2 (第一型与第二型曲线积分的关系) 设 AB 为空间中以点 A 为始点、 B 为终点的光滑曲线,其切向量正向的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$. 若 $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, 其中 P, Q, R 均为定义在 AB 上的连续函数, 则

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} F(x, y, z) \cdot \vec{ds} &= \int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \int_{\widehat{AB}} (P(x, y, z)\cos \alpha + Q(x, y, z)\cos \beta + \\ &\quad R(x, y, z)\cos \gamma)ds. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

证 注意到

$$\vec{\Delta s_i} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)\Delta s_i,$$

另一方面, 我们有 $\vec{\Delta s_i} \approx (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$, 故

$$\Delta x_i \approx \cos \alpha \Delta s_i, \Delta y_i \approx \cos \beta \Delta s_i, \Delta z_i \approx \cos \gamma \Delta s_i.$$

将以上关系代入公式(3.4.9), 并运用向量内积的公式, 再利用第一型曲线积分的定义便得公式(3.4.13).

注 1 定理中的“切向量的正方向”指的是: 沿着曲线从 A 到 B 的指向, 其方向余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是点 (x, y, z) 的函数.

注 2 由以上第一型与第二型曲线积分的关系(3.4.13), 我们可以将第二型曲线积分化为第一型进行计算.

现在给出当曲线 AB 由参数形式确定时,第二型曲线积分的计算公式.

定理 3.4.3(第二型曲线积分计算公式) 设 AB 为空间中以点 A 为始点、 B 为终点的光滑曲线,其参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (3.4.14)$$

$t = \alpha, \beta$ 分别对应于 A 与 B ,并假设 φ, ψ, χ 在区间 $I = [\alpha, \beta]$ 上连续可微,又设函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 为定义在 l 上的连续函数.则

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t)dt + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t)dt \\ &\quad + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (P\varphi' + Q\psi' + R\chi')dt. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

证 设曲线的分点 A_i 对应的参数为 t_i ,记 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.于是有

$$\Delta x_i \approx \varphi'(t)\Delta t_i, \Delta y_i \approx \psi'(t)\Delta t_i, \Delta z_i \approx \chi'(t)\Delta t_i,$$

代入(3.4.9),由定积分的定义即得(3.4.15).

定义 3.4.4(简单闭曲线) 称光滑曲线 AB 为简单闭曲线,如果其起点 A 与终点 B 重合,但没有其他的重点.

我们规定简单闭曲线 AB 的正方向为逆时针方向,并将 AB 上的积分记为

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

推论 当曲线 AB 为平面曲线,且其方程由显式

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

给出时,在 $f(x)$ 连续可微、 P, Q 连续的假设下,我们有

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x)]dx. \quad (3.4.16)$$

当 P, Q, R 满足全微分条件时,还可以得到像牛顿-莱布尼茨公式那样的计算公式.

定理 3.4.4(第二型曲线积分计算公式) 设 $\widehat{AB}$ 为空间中以点 A 为始点、 B 为终点的光滑曲线, $u = u(x, y, z)$ 为连续可微函数,使得

$$du = Pdx + Qdy + Rdz$$

在包含 $\widehat{AB}$ 的开区域内成立,则

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = u(x, y, z)|_A^B \\ = u(B) - u(A) = u(b_1, b_2, b_3) - u(a_1, a_2, a_3), \quad (3.4.17)$$

其中 (b_1, b_2, b_3) 与 (a_1, a_2, a_3) 分别是 A 与 B 的坐标.

证 设曲线 AB 的参数方程由 (3.4.14) 给出. 由 $du = Pdx + Qdy + Rdz$ 可知, $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R$, 于是有

$$Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ = \frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t)dt + \frac{\partial u}{\partial y}\psi'(t)dt + \frac{\partial u}{\partial z}\chi'(t)dt = \frac{d}{dt}u(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))dt.$$

所以

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \frac{d}{dt}u(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))dt \\ = u(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))|_a^b = u(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta)) - u(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)) \\ = u(B) - u(A) = u(b_1, b_2, b_3) - u(a_1, a_2, a_3).$$

由多元函数微分理论, 当 $du = Pdx + Qdy + Rdz$ 成立时, u 是 $Pdx + Qdy + Rdz$ 的一个原函数, 我们称 $Pdx + Qdy + Rdz$ 为恰当微分. 定理 3.4.4 仅适合于在该开区域上被积表达式为恰当微分的情形. 如何判断 $Pdx + Qdy + Rdz$ 为恰当微分, 以及如何求其原函数, 在 3.4.5 节中将详细讨论.

由定理 3.4.4 可得到如下重要结果: 如果 AB 为简单闭曲线, $Pdx + Qdy + Rdz$ 为恰当微分, 则

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0. \quad (3.4.18)$$

例 3 计算 $\int_{AB} \frac{x}{2}dx + zdy + ydz$, 这里 AB 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $z = y$ 的交线上自点 $A(1, 0, 0)$ 到点 $B(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 且位于第一象限内的一段弧.

解法 1 取 AB 的参数方程

$$x = \cos \theta, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta,$$

其中 θ 从 0 单调增大到 $\frac{\pi}{2}$, 于是

$$\int_{AB} \frac{x}{2}dx + zdy + ydz \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}(-\cos \theta \sin \theta) + \frac{2}{\sqrt{2}} \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{4} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

解法 2 以 y 为参数, 则 AB 的参数方程可写为

$$x = \sqrt{1-2y^2}, y = y, z = y,$$

其中 y 从 0 增大到 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 于是

$$\begin{aligned} \int_{AB} \frac{x}{2} dx + z dy + y dz \\ = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{1-2y^2} \cdot \frac{-2y}{\sqrt{1-2y^2}} + 2y \right) dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y dy = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

解法 3 由于 $\frac{x}{2} dx + z dy + y dz = d\left(\frac{1}{4}x^2 + yz\right)$, 故被积表达式是恰当微分, 于是

$$\int_{AB} \frac{x}{2} dx + z dy + y dz = \left(\frac{1}{4}x^2 + yz \right) \Big|_{(1,0,0)}^{(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

例 4 计算 $\int_{AB} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 这里 AB 为两种路径:

(1) 从点 $A(a, 0)$ 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = a^2 (y \geq 0)$ 到点 $B(-a, 0)$;

(2) 从点 $A(a, 0)$ 沿下半圆周 $x^2 + y^2 = a^2 (y \leq 0)$ 到点 $B(-a, 0)$.

解 (1) 取 AB 的参数方程: $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, \theta$ 从 0 单调增大到 π , 于是

$$\int_{AB} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{\pi} \frac{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}{a^2} d\theta = \pi.$$

(2) 取 AB 的参数方程: $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, \theta$ 从 2π 单调减少到 π , 于是

$$\int_{AB} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_{2\pi}^{\pi} \frac{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}{a^2} d\theta = -\pi.$$

注 在例 4 中, 虽有 $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan \frac{y}{x}\right)$, 即被积表达式是恰当微分, 但从点 A 到 B 沿上半圆与下半圆的积分不相等, 这是因为积分路径穿过 y 轴时, $x=0$, 而原函数 $\arctan \frac{y}{x}$ 在 $x=0$ 不连续.

3.4.3 第一型曲面积分定义、性质、计算公式

1. 第一型曲面积分的定义

类似于第一型曲线积分, 我们也从一个几何问题与一个物理问题出发来引入第一型曲面积分.

设 Σ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中以逐段光滑曲线 σ 为边界的曲面, 其质量是不均匀分布的, 分布密度函数为 $\rho(x, y, z)$. 今欲求该曲面的面积与质量. 见图 3.4.3.

解决此问题的思路还是“细分取近似, 求和取极限”.

(1) 求曲面 Σ 的面积 S

假设 Σ 由参数式

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \chi(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad (3.4.19)$$

给出, 并设 φ, ψ, χ 为 (u, v) 平面中区域 D 上的连续可微函数. 任给 Σ 上一组光滑曲线网(图 3.4.3), 把 Σ 分为 n 个小曲面

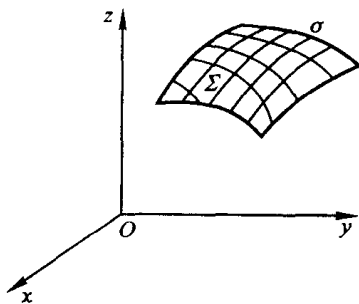


图 3.4.3

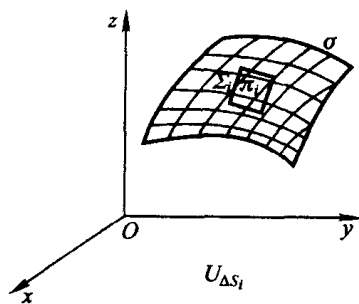


图 3.4.4

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n,$$

称为 Σ 的一个分法. 令

$$d_i = \max \{ |PQ| : P, Q \in \Sigma_i \}, \quad (3.4.20)$$

称 d_i 为 Σ_i 的直径, 并令

$$\lambda = \max \{ d_i : i = 1, 2, \dots, n \}, \quad (3.4.21)$$

称 λ 为曲线网(或分法)的模.

在每个小曲面 $\Sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$ 上任取一点 $M_i \in \Sigma_i$, 过 M_i 作 Σ_i 的切平面 π_i , 并把 Σ_i 投影到 π_i 上, 见图 3.4.4, 得到一个平面图形 T_i , 其面积记为 ΔS_i .

求和 $\sum_{i=1}^n \Delta S_i$, 并令 $\lambda \rightarrow 0$, 如果和式的极限

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i \quad (3.4.22)$$

存在并为有限数, 则称 S 为曲面 Σ 的面积.

有两个问题需要解决: 1. 如何证明式(3.4.22)中的极限存在? 2. 如何计算极限 S ?

在 φ, ψ, χ 连续可微的假设下, 经过坐标变换, 由二重积分公式求得 T_i 的面积, 从而获得面积微元 (我们略去其证明)

$$dS \equiv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \equiv \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv, \quad (3.4.23)$$

其中

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$E = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right]^2 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} \right]^2 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial u} \right]^2,$$

$$G = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right]^2 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial v} \right]^2 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial v} \right]^2,$$

$$F = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial v}.$$

曲面 Σ 的面积 S 由下式表示

$$S = \int_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv = \int_D \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv. \quad (3.4.24)$$

(2) 求曲面 Σ 的质量 $M(\Sigma)$

我们不再重复类似的分析与推理, 只用一个定理给出 $M(\Sigma)$ 的公式.

定理 3.4.5 (曲面质量公式) 设 Σ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中一逐片光滑的有界曲面, 其质量是不均匀分布的, 分布密度函数为 $\rho(x, y, z)$. 若 Σ 的参数方程由 (3.4.19) 给出, 则 Σ 的质量为

$$\begin{aligned} M(\Sigma) &= \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS \\ &= \iint_D \rho(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \\ &= \iint_D \rho(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv, \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

把求曲面 Σ 的面积和质量问题抽象化, 便引出第一型曲面积分的概念.

定义 3.4.5 (第一型曲面积分) 设 Σ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中逐片光滑的有界曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的函数, 将曲面 Σ 任意地分为 n 个小曲面 $\Sigma_i, i = 1, 2, \dots, n, \Sigma_i$ 的面积记为 ΔS_i . 假设 Σ_i 的直径与分法的模 λ 分别由 (3.4.20) 与 (3.4.21) 给出. 在 Σ_i 上任取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$, 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i, \quad (3.4.26)$$

若 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和式 (3.4.26) 有有限极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$, 且极限值与 Σ

的分法以及点 M_i 的取法无关, 则称此极限值为 $f(x, y, z)$ 沿曲面 Σ 的第一型曲面积分, 并记为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS.$$

2. 第一型曲面积分的性质与计算公式

第一型曲面积分与二重积分有类似的性质, 这里不再重复. 对于第一型曲面积分, 我们有以下计算公式.

定理 3.4.6 (第一型曲面积分计算公式) 设 Σ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的有界光滑曲面, 其参数方程由 (3.4.19) 给出, 并设 $(u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$ 为有界区域, 使得 Σ 与 D 的点一一对应, 函数 φ, ψ, χ 在 D 上连续可微; 又设函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则 f 在曲面 Σ 上的第一型曲面积分存在, 且

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \\ &= \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv, \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

此定理的证明从略. 有三种特殊情况是常用的.

定理 3.4.7 (第一型曲面积分计算公式) 设 Σ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的有界光滑曲面, 函数 f 在其上连续,

(i) 若 Σ 的方程为 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, 且 $z(x, y)$ 在 xOy 平面中的区域 D_{xy} 上连续可微, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy; \quad (3.4.28)$$

(ii) 若 Σ 的方程为 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$, 且 $x(y, z)$ 在 yOz 平面中的区域 D_{yz} 上连续可微, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x_y)^2 + (x_z)^2} dy dz; \quad (3.4.29)$$

(iii) 若 Σ 的方程为 $y = y(z, x)$, $(z, x) \in D_{zx}$, 且 $y(z, x)$ 在 zOx 平面中的区域 D_{zx} 上连续可微, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{zx}} f(x, y(z, x), z) \sqrt{1 + (y_z)^2 + (y_x)^2} dz dx. \quad (3.4.30)$$

例 5 计算积分

$$\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS,$$

这里 Σ 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = y$ 截下的一块曲面.

解 取圆锥面 Σ 的参数方程为

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = \rho,$$

其中 $(\rho, \theta) \in D = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, 且

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(y, z)}{\partial(\rho, \theta)} = -\rho \cos \theta,$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(z, x)}{\partial(\rho, \theta)} = -\rho \sin \theta,$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho,$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS &= \iint_D \rho^2 \sin \theta \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\rho d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sin \theta} \rho^2 \sin \theta d\rho = \frac{4}{15} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

例 6 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上分布有电荷, 其分布密度与点在球面上的纬度 ϕ 的正弦平方成正比, 试求球面上的总电荷 q .

解法 1 用直角坐标计算 由题设, 电荷的密度函数为 $\mu = k \sin^2 \phi$ (k 为比例常数), 据对称性, 上下两半球的电荷量相等. 我们将上半球面记为 Σ_1 , 它在 xOy 平面上的投影为 $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 由于

$$\sin^2 \phi = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2}, \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

故球面上的总电荷量为

$$\begin{aligned} q &= 2 \iint_{\Sigma_1} k \sin^2 \phi dS \\ &= 2k \iint_{D_{xy}} \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2} \cdot \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} dx dy \\ &= \frac{2k}{a} \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \end{aligned}$$

$$= \frac{2k}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{4}{3} k \pi a^2.$$

解法 2 用参数方程计算 取球面的参数方程

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, y = a \sin \varphi \sin \theta, z = a \cos \varphi,$$

其中 $(\varphi, \theta) \in \{(\varphi, \theta): 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 且

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = a^2 \sin \varphi,$$

由于纬度 ψ 与球面坐标 (φ, θ) 的关系 (见图 3.4.5)

为

$$\psi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \varphi, & \text{当 } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ \varphi - \frac{\pi}{2}, & \text{当 } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi, \end{cases}$$

所以 $\sin^2 \psi = \cos^2 \varphi$, 于是球面 Σ 上的总电荷量为

$$\begin{aligned} q &= \iint_{\Sigma} k \sin^2 \psi dS \\ &= k \iint_D \cos^2 \varphi \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\varphi d\theta = k \iint_D a^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= k a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = -\frac{2}{3} k \pi a^2 \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3} k \pi a^2. \end{aligned}$$

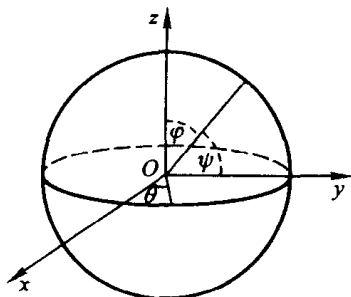


图 3.4.5

3.4.4 第二型曲面积分定义、性质、计算公式

大家记得,第二型曲线积分与曲线的方向有关.第二型曲面积分也有类似的问题,而且情形要比曲线情形复杂,因此在引进第二型曲面积分之前,先对空间曲面作一些讨论.

1. 曲面的定侧

我们知道第二型曲线积分的值与曲线的方向有关,可以想象,第二型曲面积分有类似的情况,为此我们首先需要考虑曲面的“方向”,称为曲面的“定侧”

定义 3.4.6 (曲面的定侧) 我们把由方程 $z = f(x, y)$ 定义的曲面分为两类:

第一类 用一种颜色 (如红色) 涂在曲面的一个面上, 如果不越过曲面的边缘曲线, 就不可能涂到其另外一个面, 则称这类曲面为双侧曲面.

例如上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 就是这类曲面.

第二类 将颜色从曲面的一面, 不需要越过曲面的边缘曲线, 就可以涂到其另外一面, 则称这类曲面为单侧曲面.

例如一条长方形带子 $ABCD$, 先将其扭 180° , 将 A 与 D 粘合、 B 与 C 粘合, 所得到的曲面称为默比乌斯 (Möbius) 带, 就是第二类曲面, 即单侧曲面, 见图 3.4.6.

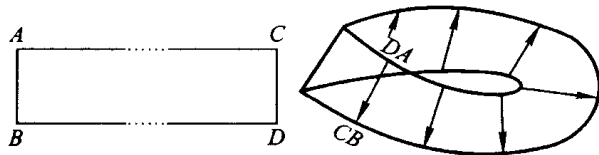


图 3.4.6

下面我们只研究双侧曲面 Σ , 并约定将 Σ 的一个侧面上的全部点的集合, 连同每一点的法方向 $\mathbf{n}$, 称为 Σ 的一个定侧, 记为 Σ^* .

在实际应用中, 按图 3.4.7 所示的坐标系来确定 Σ 的定侧, 图中 z 轴向上、 x 轴向前、 y 轴向右. 这里有 3 种情形:

(i) 曲面 $\Sigma_1: z = z(x, y)$ 的两个定侧分别称为上侧与下侧, 上侧的法方向 $\mathbf{n}$ 与 z 轴的夹角 $\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_3 \rangle \in (0, \frac{\pi}{2})$; 下侧法方向则与上侧的相反;

(ii) 曲面 $\Sigma_2: x = x(y, z)$ 的两个定侧分别称为前侧与后侧, 前侧的法方向 $\mathbf{n}$ 与 x 轴的夹角 $\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_1 \rangle \in (0, \frac{\pi}{2})$; 后侧法方向则与前侧的相反;

(iii) 曲面 $\Sigma_3: y = y(z, x)$ 的两个定侧分别称为右侧与左侧, 右侧的法方向 $\mathbf{n}$ 与 y 轴的夹角 $\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_2 \rangle \in (0, \frac{\pi}{2})$; 左侧法方向则与右侧的相反.

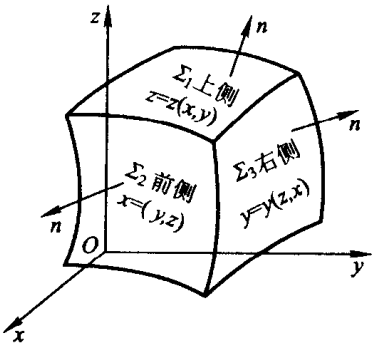


图 3.4.7

若双侧曲面 Σ 由参数方程

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D$$

给出, 这里 D 为 $\mathbf{R}^2$ 中的区域, 并设 x, y, z 连续可微, A, B, C 为

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \quad (3.4.31)$$

由空间解析几何与多元函数的知识, Σ 的一个法方向为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$, 对该双侧曲面的两个定侧约定如下: 将法方向 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 指的那个定侧称为 Σ 的正侧, 记为 Σ^+ , 另一定侧称为曲面的负侧, 记为 Σ^- .

图 3.4.7 中的曲面 Σ_1 的上侧就是现在所定义的正侧 Σ_1^+ , 其下侧便是现在所定义的负侧 Σ_1^- (为什么?). 同理, 曲面 Σ_2 的前侧是正侧 Σ_2^+ , 曲面 Σ_3 的右侧是正侧 Σ_3^+ .

对于封闭曲面的两个定侧分别称为外侧与内侧 (外侧的法向量指向该封闭曲面所围立体的外围空间).

我们还要确定曲面 Σ 的边界 Γ 的定向.

定义 3.4.7 (曲面边界的定向) 假设非封闭的双侧曲面 $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ 的边界 Γ 由光滑的简单闭曲线组成. 取曲面 Σ 的一个定侧 Σ^+ , 则 Γ 的正向按下述右旋规则给出: Σ^+ 的法方向 n 与 Γ 的正向成右手螺旋. 亦即, 伸出右手, 将姆指指向法方向 n , 四指并拢、握拳, 那么, 四指所指的方向就是 Γ 的正向, 记为 Γ^+ , 见图 3.4.8.

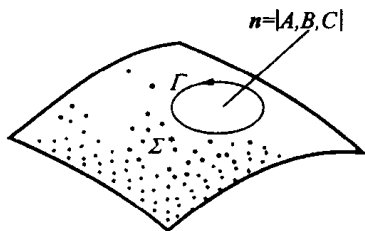


图 3.4.8

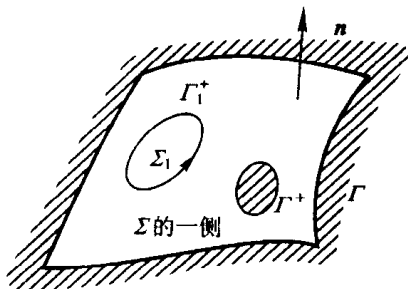


图 3.4.9

对于双侧曲面 Σ^+ 上任一简单闭曲线 Γ_1 与它所围成的曲面 $\Sigma_1 (\subset \Sigma)$, 我们约定: Σ_1^+ 与 Σ^+ 一致, Γ_1^+ 与 Γ^+ 一致.

读者记得, 对于平面上的有界闭区域 D 的边界曲线 Γ , 在第二型曲线积分时, 曾规定其正向 Γ^+ 为逆时针方向见定义 3.4.4. 现在若把平面看作 $\mathbf{R}^3$ 中的 xOy 平面, 其上的区域 D 看作空间的曲面, 则 D 的法方向就是 Oz 轴, 而 Γ^+ 的正向与原来的规定相符合 (图 3.4.9).

2. 第二型曲面积分的定义

现在可以定义第二型曲面积分了.

第二型曲面积分与以前我们所考虑的各种积分一样, 有其重要的实际背景. 我们从流体流经空间曲面 Σ 的流量问题出发.

设流动的流体通过空间双侧曲面 $\Sigma^* \subset \mathbf{R}^3$, 若流体经过曲面上的点 M 时的流速为 $\mathbf{v}(M)$, 试求单位时间内流体顺着 Σ^* 的法方向通过曲面的流量 q .

所采用的方法仍然是“细分取近似、求和取极限”.

将 Σ^* 任意地分为 n 个小曲面 $\Sigma_1^*, \Sigma_2^*, \dots, \Sigma_n^*$, 其面积记为 $\Delta S_i (i=1, 2, \dots, n)$, 直径 d_i 由 (3.4.20) 定义, 分法的模 λ 由 (3.4.21) 确定. 在每个小曲面 Σ_i^* 上任取一点 M_i , 该点的单位法方向为 $\mathbf{e}_{n_i} = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$. 于是单位时间内通过 Σ^* 的流量为

$$q \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{e}_{n_i} \Delta S_i,$$

令 $\lambda \rightarrow 0$, 对上述和式取极限, 即得

$$q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{e}_{n_i} \Delta S_i.$$

现在我们抽去上述实例的物理背景而定义第二型曲面积分.

定义 3.4.8 (第二型曲面积分) 设 Σ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中有界光滑双侧曲面, 它的一个定侧 Σ^* 的单位法向量记为 $\mathbf{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. 函数 P, Q, R 是定义在 Σ 上的函数, 记为 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. 将曲面 Σ^* 任意地分为 n 个小曲面 Σ_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$, Σ_i^* 的面积记为 ΔS_i . 假设 Σ_i^* 直径为 d_i , 分法的模为 λ (分别由式 (3.4.20) 与式 (3.4.21) 定义). 在 Σ_i^* 上任取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$, 作和式

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathbf{e} \Delta S_i, \quad (3.4.32)$$

若 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和式 (3.4.32) 有有限极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathbf{e} \Delta S_i$, 且极限值与 Σ^* 的分法以及点 M_i 的取法无关, 则称此极限值为 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 沿曲面 Σ^* 的第二型曲面积分, 并记为

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^*} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{e} dS \\ \equiv \iint_{\Sigma^*} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy. \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

这里 $\mathbf{e} ds = (\cos \alpha ds, \cos \beta ds, \cos \gamma ds) = (dydz, dzdx, dxdy)$.

据此定义, 前面所说的流量可表示为第二型曲面积分:

$$\begin{aligned} q &= \iint_{\Sigma^*} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} dS \\ &\equiv \iint_{\Sigma^*} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy, \end{aligned} \quad (3.4.34)$$

其中 $\mathbf{v} = (P, Q, R)$.

3. 第二型曲面积分的性质与计算公式

定理 3.4.8 (第二型曲面积分的性质) 假设以下的第二型曲面积分都存在, 则

(i) 积分的值与曲面的定向有关, 且

$$\iint_{\Sigma^-} P dydz + Q dzdx + R dxdy = - \iint_{\Sigma^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

(ii) 积分关于区域的可加性: 用光滑的曲线将 Σ^* 分为 n 块互不相交的曲面 Σ_i^* 之并集时, $i = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\iint_{\Sigma^*} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \sum_{i=1}^n \iint_{\Sigma_i^*} P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

(iii) 积分关于被积函数的可加性:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy \\ = \iint_{\Sigma} P dydz + \iint_{\Sigma} Q dzdx + \iint_{\Sigma} R dxdy. \end{aligned}$$

定理 3.4.9 (第二型曲面积分与第一型曲面积分的关系) 假设:

(i) $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 为有界光滑双侧曲面, Σ 的一个定侧 Σ^+ 的单位法向量记为 $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$;

(ii) 函数 P, Q, R 是 Σ 上的连续函数, 记 $F = (P, Q, R)$.

则 P, Q, R 沿曲面 Σ^+ 的第二型曲面积分存在, 且有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^+} F(x, y, z) \cdot n^0 dS &= \iint_{\Sigma^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy \\ &= \iint_{\Sigma^+} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \end{aligned} \quad (3.4.35)$$

现在我们给出第二型曲面积分的计算公式.

定理 3.4.10 (第二型曲面积分计算公式) 假设:

(i) $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 为有界光滑双侧曲面, Σ^+ 为 Σ 的一个定侧, Σ 的参数方程为

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

这里 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界区域, Σ 与 D 的点一一对应, 且函数 x, y, z 为 D 上的连续可微函数;

(ii) 函数 P, Q, R 是 Σ 上的连续函数.

则 P, Q, R 沿曲面 Σ^+ 的第二型曲面积分存在, 且有

$$\iint_{\Sigma^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \epsilon \iint_D (PA + QB + RC) du dv, \quad (3.4.36)$$

其中 (A, B, C) 由 (3.4.31) 给出, 且与 Σ^+ 的单位法向量 e 的指向一致, 被积函数 x, y, z 用参数 u, v 的表示式代入; ϵ 的取法如下: 当 Σ^+ 为 Σ^+ 时, $\epsilon = 1$, 当 Σ^+ 为 Σ^- 时, $\epsilon = -1$.

证 Σ^+ 的法向量为 $n = \epsilon(A, B, C)$, 因而 Σ^+ 的单位法向量为

$$\begin{aligned} e &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= \left(\frac{\epsilon A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{\epsilon B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{\epsilon C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right). \end{aligned}$$

据定理 3.4.9, 先将第二型曲面积分化为第一型曲面积分

$$\iint_{\Sigma^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \epsilon \iint_D \frac{PA + QB + RC}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} dS,$$

再应用第一型曲面积分的计算公式(3.4.27),即得所要证明的公式.

如定理 3.4.7 那样,我们也有

定理 3.4.11(第二型曲面积分计算公式) 设 Σ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的有界光滑双侧曲面,函数 P, Q, R 在其上连续,我们有

(i) 若 Σ 的方程为 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 且 $z(x, y)$ 在 xOy 平面中的区域 D_{xy} 上连续可微, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \text{ 上侧}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ = \iint_{D_{xy}} (-P z_x - Q z_y + R) dx dy, \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

式中被积函数所含的 z 用 $z = z(x, y)$ 代替;

(ii) 若 Σ 的方程为 $x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 且 $x(y, z)$ 在 yOz 平面中的区域 D_{yz} 上连续可微, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \text{ 前侧}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ = \iint_{D_{yz}} (P - Q x_y - R x_z) dy dz, \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

式中被积函数所含的 x 用 $x = x(y, z)$ 代替;

(iii) 若 Σ 的方程为 $y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$, 且 $y(z, x)$ 在 zOx 平面中的区域 D_{zx} 上连续可微, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \text{ 右侧}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ = \iint_{D_{zx}} (-P y_x + Q - R y_z) dz dx, \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

式中被积函数所含的 y 用 $y = y(z, x)$ 代替.

这个定理可由定理 3.4.10 得到.

当曲面 Σ 为封闭曲面时,第一型与第二型曲面积分分别记为

$$\oiint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

与

$$\oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

例 7 计算 $\iint_{\Sigma^*} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 这里 Σ^* 是圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 界于 $z = -h$ 与 $z = h$ 之间部分的外侧.

解法 1 应用直角坐标系 设 Σ^* 的 $x \geq 0$ 的部分为 Σ_1 , $x \leq 0$ 的部分为

Σ_2 , 且 Σ^* 的外侧相应于 Σ_1 的前侧与 Σ_2 的后侧.

注意到, Σ_1 的方程为 $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $(y, z) \in D_{yz}$, Σ_2 的方程为 $x = -\sqrt{a^2 - y^2}$, $(y, z) \in D_{yz}$, 这里

$$D_{yz} = \{(y, z) : -a \leq y \leq a, -h \leq z \leq h\},$$

应用第二型曲面积分的性质 2 与定理 3.4.11 得到

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^*} x dydz + y dzdx + z dx dy &= \iint_{\Sigma_1 \text{ 前侧}} + \iint_{\Sigma_2 \text{ 后侧}} \\ &= \iint_{D_{yz}} (x - yx_y - zx_z) dydz \quad (\text{其中 } x = \sqrt{a^2 - y^2}) \\ &\quad - \iint_{D_{yz}} (x - yx_y - zx_z) dydz \quad (\text{其中 } x = -\sqrt{a^2 - y^2}) \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} dydz \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} dydz = 8a^2 h \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy \\ &= 8a^2 h \arcsin \frac{y}{a} = 4\pi a^2 h. \end{aligned}$$

解法 2 应用积分性质 3 并利用直角坐标系 由

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^*} x dydz + y dzdx + z dx dy \\ = \iint_{\Sigma^*} x dydz + \iint_{\Sigma^*} y dzdx + \iint_{\Sigma^*} z dx dy, \end{aligned}$$

并用解法 1 中的记号 $\Sigma_1, \Sigma_2, D_{yz}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^*} x dydz &= \iint_{\Sigma_1 \text{ 前侧}} x dydz + \iint_{\Sigma_2 \text{ 后侧}} x dydz \\ &= \iint_{D_{yz}} \sqrt{a^2 - y^2} dydz - \iint_{D_{yz}} (-\sqrt{a^2 - y^2}) dydz \\ &= 4h \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = 2\pi a^2 h. \end{aligned}$$

由对称性得

$$\iint_{\Sigma^*} y dzdx = 2\pi a^2 h.$$

又由第二型曲面积分的定义, 在 Σ^* 上有 $\cos \gamma = 0$, 故

$$\iint_{\Sigma^*} z dx dy = 0,$$

因此, 得

$$\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 4\pi a^2 h.$$

解法 3 应用参数方程 取 Σ^* 的参数方程

$$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = z \quad ((\theta, z) \in D),$$

其中 $D = \{(\theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, -h \leq z \leq h\}$, 且

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = a \cos \theta, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = a \sin \theta, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 0,$$

故 Σ^* 为 Σ 的外侧, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \iint_D (Ax + By + Cz) d\theta dz \\ &= \iint_D (a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + 0) d\theta dz = a^2 \iint_D d\theta dz = 4\pi a^2 h. \end{aligned}$$

解法 4 化为第一型曲面积分 由于 Σ 的外侧的法向量的方向余弦为

$\cos \alpha = \frac{x}{a}, \cos \beta = \frac{y}{a}, \cos \gamma = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{x^2 + y^2}{a} dS = a \iint_{\Sigma} dS = 4\pi a^2 h. \end{aligned}$$

例 8 计算 $\iint_{\Sigma} z dx dy$, 这里 Σ^* 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

解法 1 应用直角坐标系 设球面 Σ 的上半部分为 Σ_1 , 下半部分为 Σ_2 , 且 Σ 的外侧相应于 Σ_1 的上侧与 Σ_2 的下侧. 设 Σ_1 的方程为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad ((x, y) \in D_{xy});$$

Σ_2 的方程为

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad ((x, y) \in D_{xy});$$

其中 $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$. 应用积分的性质 2 与定理 3.4.10 的公式 (3.4.37) 得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dx dy &= \iint_{\Sigma_1 \text{ 上侧}} z dx dy + \iint_{\Sigma_2 \text{ 下侧}} z dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy - \iint_{D_{xy}} -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{4}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

解法 2 应用参数方程 取球面 Σ^* 的参数方程

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, y = a \sin \varphi \sin \theta, z = a \cos \varphi \quad ((\theta, \varphi) \in D),$$

其中 $D = \{(\varphi, \theta): 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 且

$$A = a^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, \quad B = a^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, \quad C = a^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$

所以 Σ^+ 为 Σ 的外侧. 据定理 3.4.9 可得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^+} z dx dy &= \iint_D (A \times 0 + B \times 0 + C \times z) d\varphi d\theta \\ &= \iint_D a^2 \sin^2 \varphi a \cos \varphi d\varphi d\theta = a^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

解法 3 化为第一型曲面积分 由对称性可得

$$\iint_{\Sigma} x dy dz = \iint_{\Sigma} y dz dx = \iint_{\Sigma} z dx dy.$$

所以

$$\iint_{\Sigma} z dx dy = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} \{x dz dy + y dz dx + z dx dy\},$$

而 Σ 外侧的法向量的方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{x}{a}, \cos \beta = \frac{y}{a}, \cos \gamma = \frac{z}{a}$, 据定理 3.4.8 可得

$$\iint_{\Sigma} z dx dy = \frac{1}{3a} \iint_{\Sigma} \{x^2 + y^2 + z^2\} dS = \frac{a}{3} \iint_{\Sigma} dS = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

3.4.5 格林公式、斯托克斯公式、高斯公式

在曲线积分与二重积分之间、曲线积分与曲面积分之间、曲面积分与三重积分之间存在着内在联系, 分别由格林(Green)公式、斯托克斯(Stokes)公式, 以及高斯(Gauss)公式给出, 它们可看作牛顿-莱布尼茨公式在一定意义下的推广.

1. 格林公式

格林公式刻画的是平面区域 D 上的二重积分与其边界上的第二型曲线积分的关系.

(1) 平面区域的连通性

定义 3.4.9(单连通与多连通) 称平面区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为单连通的, 若 D 内任一简单闭曲线所包围的部分都包含在 D 内; 否则称 D 为多连通的(图 3.4.10).

(2) 格林公式

定理 3.4.12(格林定理) 假设

(i) $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界区域, D 的边界 Γ 为光滑闭曲线, 取其正向 Γ^+ ;

(ii) P, Q 为定义在 D 上的连续可微的二元函数.

则成立如下格林公式

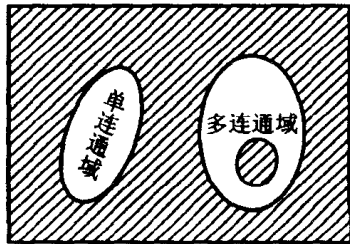


图 3.4.10

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

证 首先假设 D 是单连通区域, 且同时可表示为如下两种形式(图 3.4.11):

$$D = \{(x, y): \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

或

$$D = \{(x, y): \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

因此有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \\ &= \int_c^d [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)] dy \\ &= \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy + \int_d^c Q(\psi_1(y), y) dy \end{aligned}$$

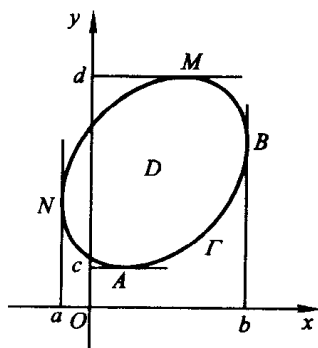


图 3.4.11

另一方面,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} Q(x, y) dy &= \left[\int_{ABM} + \int_{MNA} \right] Q(x, y) dy \\ &= \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy + \int_d^c Q(\psi_1(y), y) dy \end{aligned}$$

故

$$\int_{\Gamma^+} Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

同理可证

$$\int_{\Gamma^+} P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

两式相加, 即得所需证的公式.

其次, 考虑 D 为多连通区域的情形, 或者 D 不能简单地表示为上面所写的两种形式时, 我们用平行于坐标轴的线段, 将 D 分为有限个子区域 $D_i, i = 1, 2, \dots, n$, 使得每个 D_i 为连通的, 且可表示为图 3.4.12 的两种形式, 而 D_i 的边界曲线的正向表示为 Γ_i^+ , 如图 3.4.12 所示. 于是, 在每个小区域 D_i 上, 格林公式成立

$$\int_{\Gamma_i^+} Pdx + Qdy = \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

由于小区域 D_i 中凡是两个有公共边界的, 其方向相反, 积分值在其上互相抵消, 于是

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy &= \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

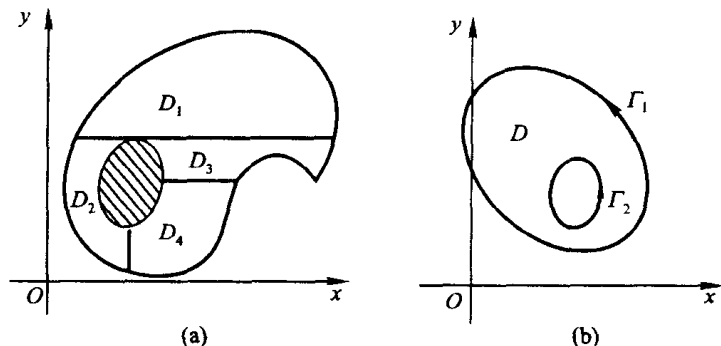


图 3.4.12

这就是要证明的.

注 格林公式对逐段光滑曲线 Γ 也成立. 逐段光滑曲线是指: Γ 由有限条光滑曲线 $\Gamma_i, i=1, 2, \dots, n$, 在有限个点上相连接而成, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$, 在连接点上可以不存在导数.

推论 1 设 D 是平面简单闭曲线 Γ_1 与 Γ_2 之间的区域, Γ_1 包围 Γ_2 , 且 Γ_1 、 Γ_2 均取正向, 如图 3.4.12(b); 若 P, Q 是 D 上的连续可微函数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\forall (x, y) \in D),$$

则

$$\int_{\Gamma_1^+} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_2^+} Pdx + Qdy.$$

证 由于 $\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$ 组成平面区域 D 的边界曲线的正向, 于是在 D 上应用格林公式即得

$$\int_{\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

由于

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-} Pdx + Qdy &= \left\{ \int_{\Gamma_1^+} + \int_{\Gamma_2^-} \right\} Pdx + Qdy \\ &= \left\{ \int_{\Gamma_1^+} - \int_{\Gamma_2^+} \right\} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

所以

$$\int_{\Gamma_1^+} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_2^+} Pdx + Qdy.$$

推论 2 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界闭区域, D 的边界 Γ 逐段光滑, 则区域 D 的面积

为

$$\sigma(D) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} x dy - y dx.$$

证 取 $P=0, Q=x$, 在区域 D 上应用格林公式得

$$\sigma(D) = \iint_D dx dy = \int_{\Gamma^+} x dy.$$

又取 $P=-y, Q=0$, 在区域 D 上应用格林公式得

$$\sigma(D) = \iint_D dx dy = - \int_{\Gamma^+} y dx,$$

两式相加即得所求的公式.

定理 3.4.13 (4 个相互等价的性质) 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为单连通区域 (有界或无界), 函数 P, Q 在其上连续可微, 则下述事实相互等价:

(i) 对任意的 $(x, y) \in D$, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

(ii) 沿 D 内任意逐段光滑的简单闭曲线 Γ , 有

$$\int_{\Gamma^+} P dx + Q dy = 0;$$

(iii) $A, B \in D$ 为 D 中的任意两点, 从 A 到 B 的曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$$

与路径无关, 这里 $\widehat{AB} \subset D$ 为联结 A 与 B 的任意逐段光滑的曲线;

(iv) 存在单值可微函数 u , 使得

$$du = P dx + Q dy.$$

证 证明的顺序是: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) 由格林公式直接得到.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 在 D 内任取两条从 A 到 B 的逐段光滑的曲线 Γ_1 与 Γ_2 , 除端点以外 Γ_1 与 Γ_2 无其他交点, 见图 3.4.13. 只要证明

$$\int_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy.$$

由于 $\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$ 组成逐段光滑的简单闭曲线, 据 (ii), 我们得到

$$\int_{\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-} P dx + Q dy = 0.$$

而

$$\int_{\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-} = \int_{\Gamma_1^+} + \int_{\Gamma_2^-} = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2}$$

所以

$$\int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 我们来证明, 函数

$$u(x, y) = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} Pdx + Qdy$$

是 $Pdx + Qdy$ 的原函数, 其中 $M_0, M \in D$ 为 D 中任意两点. 事实上, 只须证明

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

由于

$$\begin{aligned} & \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left[\int_{M_0(x_0, y_0)}^{M'(x + \Delta x, y)} - \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} \right] Pdx + Qdy \right\}, \end{aligned}$$

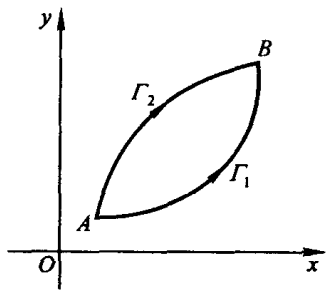


图 3.4.13

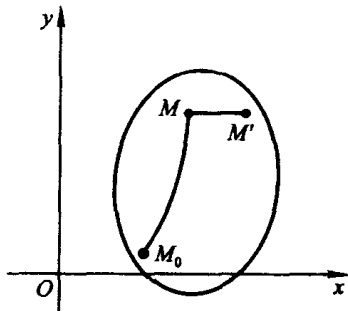


图 3.4.14

这里不妨假设 Δx 充分小, 使得 $M' \in D$. 对于上式右边括号中的第一项, 因 (ii) 成立, 取 $M_0 M' = M_0 M + MM'$ (图 3.4.14), 则由积分中值定理得

$$\begin{aligned} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{MM'} Pdx + Qdy \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} Pdx = P(x + \theta \Delta x, y), \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 我们有

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$ 可类似证明.

(iv) $\Rightarrow$ (i) 由于 $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$, 故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

由 P, Q 连续可微, 所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, 从而 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 定理证毕.

在曲线积分与路径无关时, 我们记

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_A^B P dx + Q dy.$$

进而, 如果积分区域 D 是矩形域 $D = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ 时, 与路径无关的原函数 $u(x, y)$ 还可表示成

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C,$$

或

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C,$$

读者可参看图 3.4.15, 自行证明这两个公式.

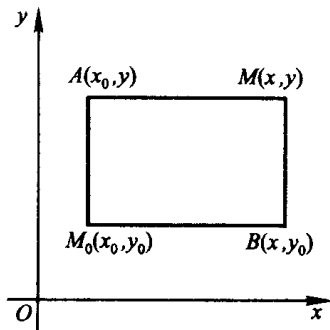


图 3.4.15

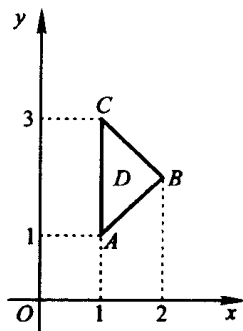


图 3.4.16

例 9 计算 $\int_{\Gamma} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, 这里 Γ 是以 $A(1, 1)$ 、 $B(2, 2)$ 、 $C(1, 3)$ 为顶点的三角形边界的正向, 图 3.4.16.

解 记 $P = 2(x^2 + y^2)$, $Q = (x + y)^2$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x - y).$$

在以 A, B, C 为顶点的三角形区域 $D = \{(x, y): x \leq y \leq 4 - x, 1 \leq x \leq 2\}$, 应用格林公式得

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy &= \iint_D \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right\} dx dy \\ &= \int_1^2 dx \int_x^{4-x} 2(x - y) dy = -4 \int_1^2 (x - 2)^2 dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{4}{3}(x-2)^3 \Big|_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

例 10 对于曲线积分 $I = \int_{\Gamma} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$,

(1) 假设 Γ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 取正向, 试求 I 的值;

(2) 分别求被积表达式 $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ 在上半平面 ($y > 0$) 与右半平面 ($x > 0$) 的原函数.

解 (1) 记

$$P = \frac{y}{x^2 + y^2}, Q = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

则当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

P, Q 在 $(0, 0)$ 不连续, 所以不能在 Γ 包围的区域上应用格林公式. 取 $0 < \epsilon < \min(a, b)$, 并记

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \epsilon^2\}.$$

应用推论 1 可得

$$I = \int_{\Gamma_1^+} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-\epsilon^2 \sin^2 \theta - \epsilon^2 \cos^2 \theta}{\epsilon^2} d\theta = -2\pi.$$

(2) 求上半平面 $y > 0$ 的原函数: 在上半平面上, 由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 据定理 3.4.12

可知被积表达式的原函数存在. 取 $x_0 = 0, y_0 = 1$, 则原函数为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, y) dx + \int_1^y Q(0, y) dy + C_1 \\ &= \int_0^x \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \int_1^y 0 dy + C_1 = \arctan \frac{x}{y} + C_1; \end{aligned}$$

同理, 在右半平面上, 被积表达式的原函数存在, 取 $x_0 = 1, y_0 = 0$, 则原函数为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x P(x, y) dx + \int_0^y Q(1, y) dy + C_2 \\ &= \int_1^x 0 dx + \int_0^y \frac{-x}{x^2 + y^2} dy + C_2 = -\arctan \frac{x}{y} + C_2. \end{aligned}$$

例 11 计算

$$I = \int_{\Gamma} [(x + y + 1)e^x - e^y + y] dx + [e^x - (x + y + 1)e^y - x] dy,$$

这里 Γ 是旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 上从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一拱,

见图 3.4.17.

解 记

$$P = (x + y + 1)e^x - e^y + y,$$

$$Q = e^x - (x + y + 1)e^y - x$$

则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2.$$

在 $\Gamma \cup \overline{AO}$ 所范围的区域 D 上应用格林公式得

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \cup \overline{AO}} P dx + Q dy \\ &= - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2 \iint_D dx dy = 2 \int_0^{2\pi a} y dx \\ &= 2 \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 2a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= 6\pi a^2, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} I &= 6\pi a^2 - \int_{\overline{AO}} = 6\pi a^2 + \int_{\overline{OA}} P dx + Q dy \\ &= 6\pi a^2 + \int_0^{2\pi a} [(x+1)e^x - 1] dx = 6\pi a^2 + 2\pi a(e^{2\pi a} - 1). \end{aligned}$$

2. 斯托克斯公式

斯托克斯公式刻画的是沿空间曲面 Σ 的第二型曲面积分与沿曲面 Σ 的边界 Γ 的第二型曲线积分之间的关系.

(1) 空间区域的连通性

定义 3.4.10 (体连通域与面连通域) 我们称空间区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为体单连通域, 若 Ω 内任一封闭曲面所包围的部分都包含在 Ω 内; 否则称 D 为体多连通域.

例如, 球面、轮胎曲面所围的为体单连通域; 两个同心球面间的立体为体多连通域.

称空间区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为面单连通域, 若 Ω 内任一简单闭曲线 Γ , 总存在以 Γ 为边界的曲面 Σ , 使得 $\Sigma \subset \Omega$; 否则称为面多连通域.

例如, 球体、两个同心球面之间的立体为面单连通域; 轮胎面所包围的立体为面多连通域.

(2) 斯托克斯公式

定理 3.4.14 (斯托克斯定理) 假设

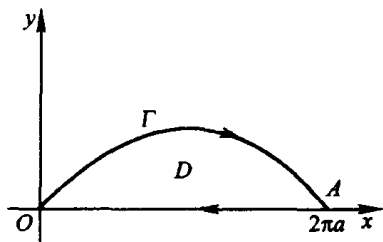


图 3.4.17

(i) $\Sigma \subset \mathbf{R}^2$ 是由逐段光滑的简单闭曲线 Γ 所包围的非封闭逐片光滑双侧曲面. 取 Σ 的一个定侧 Σ^* , 并按右旋规则确定 Γ 的正向 Γ^+ ;

(ii) $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是包含 Σ 的开区间, 且函数 P, Q, R 在 Ω 内连续可微. 则成立如下斯托克斯公式

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \iint_{\Sigma^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned}$$

证 首先假设曲面 Σ 为光滑的, 方程为 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 且 Σ^* 为 Σ 的上侧, 其边界逐段光滑简单闭曲线 Γ 的正向记为 Γ^+ , 它在 xOy 平面上的投影 l^+ 是 D_{xy} 的边界, 见图 3.4.18. 我们证明

$$\int_{\Gamma^+} Pdx = \iint_{\Sigma^+} \left(\frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \right). \quad (3.4.40)$$

事实上, 设 l^+ 的参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta],$$

则 Γ^+ 的参数方程为

$$\begin{aligned} x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t) &\equiv z(\varphi(t), \psi(t)), \\ t &\in [\alpha, \beta], \end{aligned}$$

这里 t 从 α 单调变化到 β . 据第二型曲线积分的计算公式与格林公式得

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} Pdx &= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t), z(\varphi(t), \psi(t))) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{l^+} P(x, y, z(x, y)) dx \\ &= \iint_{D_{xy}} \left\{ 0 - \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] \right\} dxdy \\ &= - \iint_{D_{xy}} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] dxdy. \end{aligned}$$

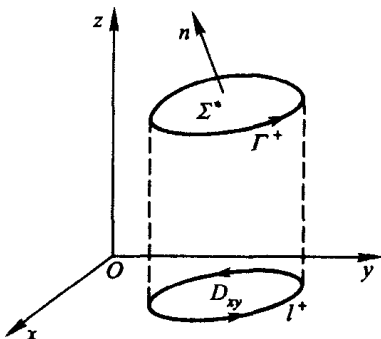


图 3.4.18

其中 $z = z(x, y)$. 进而, 将定理 3.4.11 的公式 (3.4.37) 中的 P, Q, R 分别以 $0, \frac{\partial P}{\partial z}, -\frac{\partial P}{\partial y}$ 代换, 即得

$$\iint_{\Sigma^+} \left(\frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \right) = - \iint_{D_{xy}} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] dxdy.$$

这就证明了式 (3.4.40).

当曲面 Σ^* 为逐片光滑曲面时, 总可将其用有限条光滑曲线分为有限块小

曲面 Σ_i^* , $i=1, 2, \dots, m$, 使得每个 Σ_i^* 的方程总可写为 $z=z(x, y)$, $y=y(z, x)$ 或 $x=x(y, z)$, 分别利用定理 3.4.11 中的三种类型的公式, 然后累加起来便可得到(3.4.40).

同理可证,

$$\int_{\Gamma^*} Q dy = \iint_{\Sigma_{\text{上侧}}} \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} dy dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \right); \quad (3.4.41)$$

$$\int_{\Gamma^*} R dz = \iint_{\Sigma_{\text{上侧}}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx \right); \quad (3.4.42)$$

将(3.4.40)、(3.4.41)与(3.4.42)相加便得所要证明的斯托克斯公式.

斯托克斯公式也可写为如下形式

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^*} P dx + Q dy + R dz &= \\ &= \iint_{\Sigma^*} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma^*} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS, \end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ^* 的法向的方向余弦.

类似于定理 3.4.13, 我们有

定理 3.4.15(4 个相互等价的性质) 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为空间单连通区域(有界或无界), 函数 P, Q, R 在 Ω 上连续可微, 则下述事实相互等价

(i) 对任意的 $(x, y, z) \in \Omega$, 有

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

(ii) 沿 Ω 内任意逐段光滑的简单闭曲线 Γ , 有

$$\int_{\Gamma^*} P dx + Q dy + R dz = 0;$$

(iii) $A, B \in \Omega$ 为 Ω 中的任意两点, 从 A 到 B 的曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz$$

与路径无关, 这里 $\widehat{AB} \subset \Omega$ 为联结 A 与 B 的任意逐段光滑的曲线;

(iv) 存在单值可微函数 u , 使得

$$du = P dx + Q dy + R dz.$$

证明的顺序也是: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i), 这里从略. 同样, 如果积分区域 Ω 是长方体域

$$\Omega = \{(x, y, z): a < x < b, c < y < d, h < z < k\}$$

时, 与路径无关的原函数 $u(x, y, z)$ 还可表示成

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= \int_{M_0(x_0, y_0, z_0)}^{M(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz + C \\
 &= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz + C \\
 &= \int_{x_0}^x P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z)dz + C.
 \end{aligned}$$

例 12 设 $P = y, Q = 2z, R = 3x, \Sigma$ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, 取上侧, 试验证斯托克斯公式.

解 曲面 Σ 的边界 Γ 为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0, \end{cases}$$

Γ^+ 的参数方程为

$$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = 0,$$

θ 从 0 增大到 2π , 于是,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_{\Gamma^+} ydx + 2zdy + 3xdz \\
 &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin^2 \theta + 0 + 0) d\theta = -\pi a^2.
 \end{aligned}$$

另一方面, 由 $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 则

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma \text{ 上侧}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\
 &= \iint_{\Sigma \text{ 上侧}} -2dydz - 3dzdx - dxdy = \iint_{D_{xy}} (2z_x + 3z_y - 1) dxdy \\
 &= \left(\iint_{D_{xy}} \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \iint_{D_{xy}} \frac{-3y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} - \iint_{D_{xy}} \right) dxdy \\
 &= 0 + 0 - \pi a^2 = -\pi a^2.
 \end{aligned}$$

因而斯托克斯公式成立, 证毕.

例 13 计算曲线积分

$$I = \int_{\Gamma^+} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz,$$

其中 Γ 是圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = a \end{cases},$$

Γ^+ 的方向是从 x 轴正向看去为逆时针方向.

解 记 $P = y - z, Q = z - x, R = x - y$, 取 Γ^+ 所围的平面区域为 Σ , 其上侧如图 3.4.19 所示. 应用斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\Gamma^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\
 &= \iint_{\Sigma_{\text{上侧}}} -2dydz - 2dzdx - 2dxdy \\
 &= -2 \iint_{\Sigma_{\text{上侧}}} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS,
 \end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 上侧的方向余弦

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

又由于圆 Γ 的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, 所以

$$\begin{aligned}
 I &= -2\sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS = -2\sqrt{3} \sigma(\Sigma) \\
 &= -2\sqrt{3} \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a \right)^2 = -\frac{4}{\sqrt{3}} \pi a^2.
 \end{aligned}$$

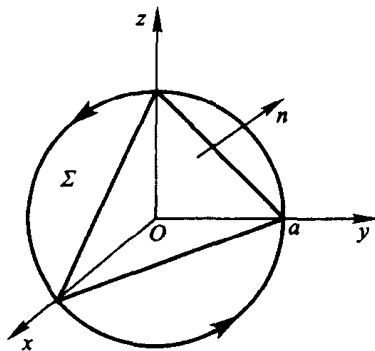


图 3.4.19

例 14 设 Σ 是平面 $x+y+z=1$ 的第一象限部分, 取上侧. 求力 $F=(y^2, z^2, x^2)$ 沿 Σ 的边界 Γ^+ 所作之功 W .

解 应用斯托克斯公式可得到力 F 沿 Γ^+ 所作之功为

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\Gamma^+} F \cdot n^0 ds = \int_{\Gamma^+} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz \\
 &= \iint_{\Sigma_{\text{上侧}}} \left(\frac{\partial x^2}{\partial y} - \frac{\partial z^2}{\partial x} \right) dydz + \left(\frac{\partial y^2}{\partial z} - \frac{\partial x^2}{\partial y} \right) dzdx + \\
 &\quad \left(\frac{\partial z^2}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) dxdy \\
 &= -2 \iint_{\Sigma_{\text{上侧}}} z dydz + x dzdx + y dxdy \\
 &= -2 \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{3}} (x+y+z) dS \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma(\Sigma) = -1.
 \end{aligned}$$

3. 高斯公式

高斯公式揭示了空间区域 Ω 上的三重积分与沿 Ω 的边界 Σ 的第二型曲面积分之间的联系.

定理 3.4.16 (高斯定理) 假设

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为空间的有界区域, Ω 的边界 Σ 为逐段光滑的封闭曲面;

(ii) P, Q, R 为定义在 Ω 上的连续可微函数.

则成立如下高斯公式 (又称奥斯特洛格拉德斯基公式)

$$\iint_{\Sigma \text{ 外侧}} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV.$$

证 首先设 Ω 是体单连通域, 且可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) : z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\},$$

其中 z_1, z_2 在 D_{xy} 上连续, $D_{xy} \subset \mathbf{R}^2$ 为有界闭区域. 记曲面 $z = z_1(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 为 Σ_1 ; 曲面 $z = z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 为 Σ_2 . 于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_{D_{xy}} [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dx dy \\ &= \iint_{\Sigma_2 \text{ 上侧}} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\Sigma_1 \text{ 下侧}} R(x, y, z) dx dy \\ &= \iint_{\Sigma \text{ 外侧}} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

如果区域 Ω 为体多连通域, 或者曲面 Σ 不满足上述要求时, 可以用与坐标平面平行的平面, 将 Ω 分为有限个子域 $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, n$, 使得每个子域 Ω_i 为体单连通域, 且满足上述证明要求, 因而在每个子域 Ω_i 上也成立(3.4.43), 然后累加起来, 可得式(3.4.43)在 Ω 上也成立.

同法可证

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iint_{\Sigma \text{ 外侧}} P(x, y, z) dydz, \quad (3.4.44)$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iint_{\Sigma \text{ 外侧}} Q(x, y, z) dzdx. \quad (3.4.45)$$

将(3.4.43)、(3.4.44)、(3.4.45)相加便可得定理的结论.

推论 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为有界体单连通域, Ω 的边界是逐片光滑的封闭曲面, 则区域 Ω 的体积为

$$V(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma \text{ 外侧}} x dydz + y dzdx + z dx dy. \quad (3.4.46)$$

证 取 $P = \frac{1}{3}x, Q = \frac{1}{3}y, R = \frac{1}{3}z$, 在区域 Ω 上应用高斯公式便可得公式(3.4.46).

定理 3.4.17(3 个相互等价的性质) 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为空间单连通区域(有界或无界), 函数 P, Q, R 在 Ω 上连续可微, 则下述事实相互等价:

(i) 对任意的 $(x, y, z) \in \Omega$, 有

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0;$$

(ii) 沿 Ω 内任意逐片光滑的封闭曲面的定向 Σ^* , 有

$$\iint_{\Sigma^*} P dydz + Q dzdx + R dxdy = 0;$$

(iii) $\Gamma \subset \Omega$ 为 Ω 中的任意简单闭曲线, 取方向 Γ^+ , 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma^*} P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

与曲面的形状无关, 其中曲面 $\Sigma \subset \Omega$ 是任意的、以 Γ 为边界的非封闭的双侧曲面, 且 Σ^* 与 Γ^+ 按右旋规则确定.

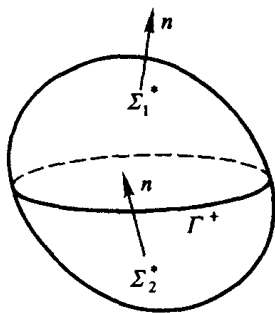


图 3.4.20

证 证明的顺序是: (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (ii),

(ii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) 应用高斯公式立即可得.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 在 Ω 内任取两片以 Γ 为边界的双侧曲面的定侧 Σ_1^* 、 Σ_2^* , 见图 3.4.20, 我们只要证明

$$\iint_{\Sigma_1^*} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\Sigma_2^*} P dydz + Q dzdx + R dxdy;$$

由于 $(\Sigma_1^*) \cup (\Sigma_2^*)^-$ 是 Ω 中的逐片光滑的封闭曲面, 由 (ii) 成立得

$$\iint_{(\Sigma_1^*) \cup (\Sigma_2^*)^-} P dydz + Q dzdx + R dxdy = 0;$$

但因

$$\iint_{(\Sigma_1^*) \cup (\Sigma_2^*)^-} = \iint_{(\Sigma_1^*)} + \iint_{(\Sigma_2^*)^-} = \iint_{\Sigma_1^*} - \iint_{\Sigma_2^*},$$

所以

$$\iint_{\Sigma_1^*} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\Sigma_2^*} P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) 在封闭曲面 Σ 上任取逐段光滑的简单闭曲线 Γ , 将 Σ 分成两片以 Γ 为边界的双侧曲面, 取定 Γ 的正向与曲面的定侧, 按 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 的步骤反推即可得证.

(ii) $\Rightarrow$ (i) 用反证法. 假设存在 $M_0 \in \Omega$, 使得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_0} \neq 0;$$

不妨设

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_0} > 0.$$

因 P, Q, R 连续可微, 故存在 M_0 的球形邻域 $B_\delta(M_0)$, 使得闭球 $\overline{B_\delta(M_0)} \subset \Omega$,

且当 $(x, y, z) \in \overline{B_\delta(M_0)}$ 时,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} > \frac{k}{2},$$

设 $B_\delta(M_0)$ 的边界为 Σ , 应用高斯公式得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \text{ 外侧}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iiint_{B_\delta(M_0)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \geq \frac{k}{2} \iiint_{B_\delta(M_0)} dV \\ &= \frac{k}{2} \frac{4}{3} \pi \delta^3 > 0. \end{aligned}$$

此与(ii)矛盾. 定理得证.

例 15 在例 7 中, 我们计算过积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 这里 Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 介于 $z = -h$ 与 $z = h$ 之间部分的外侧. 例 7 给出 4 种解法, 现在用第 5 种方法来解.

解 因 Σ 不是封闭曲面, 不能直接利用高斯公式. 我们将曲面 Σ 加上上底 Σ_1 与下底 Σ_2 :

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq a^2, z = h\},$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq a^2, z = -h\},$$

这样, $\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 为封闭曲面, 取外侧, 并记其所围的立体为 Ω , 应用高斯公式得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dV \\ &= 3 V(\Omega) = 6\pi a^2 h. \end{aligned}$$

现在计算上顶 Σ_1 与下底 Σ_2 上的积分. 记

$$D_{xy} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\},$$

由于

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \iint_{D_{xy}} h dz dy = \pi a^2 h, \\ \iint_{\Sigma_2} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= - \iint_{D_{xy}} (-h) dz dy = \pi a^2 h, \end{aligned}$$

所以

$$I = \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2} - \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_2} = 4\pi a^2 h.$$

例 16 在例 6 中, 我们用 3 种方法计算过积分 $I = \iint_{\Sigma} z dx dy$, 其中 Σ 是球

面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧. 现在用第 4 种方法来解它.

解 由 $P=0, Q=0, R=z$. 设球面 Σ 所包围的区域为 Ω , 直接应用高斯公式得

$$I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iiint_{\Omega} dV = V(\Omega) = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

习 题

1. 求下列空间曲线的弧长:

(1) $x=3t, y=3t^2, z=2t^3 \quad (0 \leq t \leq 1);$

(2) $x=e^{-t} \cos t, y=e^{-t} \sin t, z=e^{-t} \quad (0 \leq t < +\infty).$

2. 计算下列平面的对弧长的曲线积分:

(1) $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dl$, 其中 Γ 为连接 (a, a) 与 (b, b) 的直线段 $(0 < a < b)$;

(2) $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) dl$, 其中 Γ 为以 $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ 为顶点的三角形;

(3) $\oint_{\Gamma} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl$, 其中 Γ 为 $x^2 + y^2 = a^2, y = x, y = 0$ 所围的位于第一象限区域的边界;

(4) $\oint_{\Gamma} y dl$, 其中 Γ 为 $y^2 = 2x$ 上 $(0, 0)$ 到 $(2, 4)$ 的一段弧;

(5) $\oint_{\Gamma} xy dl$, 其中 Γ 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 位于第一象限的一段弧;

(6) $\oint_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$.

3. 计算下列空间的对弧长的曲线积分:

(1) $\int_{\Gamma} \left(\frac{z^2}{x^2 + y^2} \right) dl$, 其中 Γ 为 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at$ 上自 $(a, 0, 0)$ 到 $(a, 0, 2a\pi)$ 的一段弧;

(2) $\oint_{\Gamma} (x^2 + 2y^2 + z^2) dl$, 其中 Γ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z = x$ 的交线;

(3) $\oint_{\Gamma} z^2 dl$, 其中 Γ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$ 的交线.

4. 计算下列平面的对坐标的曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma} x dy$, 其中 Γ 为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 与坐标轴所围单闭曲线, 取逆时针方向;

(2) $\int_{\widehat{AB}} (x^2 + y^2) dy$, 其中 $\widehat{AB}$ 为 $y = x^2$ 上自 $A(0, 0)$ 到 $B(2, 4)$ 的一段弧;

(3) $\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx$, 其中 Γ 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 取逆时针方向;

(4) $\oint_{\Gamma} y^2 dx - x^2 dy$, 其中 Γ 为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, 取逆时针方向.

5. 计算下列空间的对坐标的曲线积分:

(1) $\int_{\Gamma} xy dx + (x-y) dy + x^2 dz$, 其中 Γ 为 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 上自点 $(a, 0, 0)$

到点 $(-a, 0, b\pi)$ 的一段弧;

(2) $\int_{\Gamma} x dx + y dy + (x+y-1) dz$, 其中 Γ 为从 $(1, 1, 1)$ 到 $(2, 3, 4)$ 的线段.

6. 对下列连接 $A(0, 0), B(1, 1)$ 的路径, 计算

$$\int_{AB} (x-y^2) dx + 2xy dy.$$

(1) 线段 AB ; (2) 从 A 到 $P(1, 0)$ 再到 B 的折线; (3) 从 A 到 $P(0, 1)$ 再到 B 的折线.

7. 试证下列曲线积分的被积表达式是恰当微分, 找出原函数, 并求值.

(1) $\int_{AB} e^x (\cos y dx - \sin y dy)$, 其中 AB 为从 $A(0, 0)$ 到 $B(\ln 2, \pi)$ 的弧段;

(2) $\int_{\Gamma} (x+y^2) dx + 2xy dy + z dz$, 其中 Γ 为从 $(0, 0, 0)$ 到 $(1, 1, 1)$ 的线段.

8. 求质点在力场 $F = \{y-x, x+y+z\}$ 中沿曲线

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = \frac{c}{2\pi} t,$$

从 $A(a, 0, 0)$ 到 $B(a, 0, c)$ 所作的功.

9. 求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 界于 xy 平面与 $z = y (y \geq 0)$ 之间部分的面积.

计算下列(10—17)第一型曲面积分:

10. $\iint_{\Sigma} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS$, 其中 Σ 为 $x+y+z=1 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

11. $\iint_{\Sigma} (y+2z) dS$, 其中 Σ 为 $3x+2y-z+1=0 (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$.

12. $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

13. $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

14. $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a \leq z \leq 2a)$.

15. $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq 1)$.

16. $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$

割下的部分.

17. $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) (0 \leq z \leq 1)$.

计算下列(18—22)第二型曲面积分:

18. $\iint_{\Sigma} y(x-z) dy dz + x^2 dz dx + (y^2 + xz) dx dy$, 其中 Σ 为 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$

的外侧表面.

19. $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (x \geq 0, y \geq 0)$, 取外侧.

20. $\iint_{\Sigma} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, 其中 Σ 为圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$), 取上侧.

21. $\iint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中 Σ 同上题.

22. $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)dzdx + z dxdy$, 其中 Σ 为圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1$), 取下侧.

§ 3.5 积分的应用

积分和微分一样,在自然科学的各个领域中有着广泛的应用.本节中我们举出几何和物理方面的应用.

3.5.1 曲线长度、曲面面积、立体体积

1. 平面曲线的长度

平面曲线的长度在不同的坐标系中有不同的计算公式.

(1) 直角坐标系之下

设曲线的直角坐标表示式为(图 3.5.1)

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

其中 $y(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续可微函数, 则弧微元 ds 为

$$ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx,$$

弧长 s 公式为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

(2) 极坐标系之下

设曲线的极坐标表示式为(图 3.5.2)

$$r = r(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

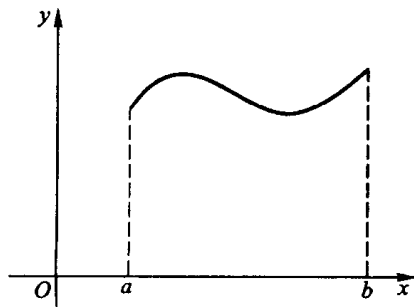


图 3.5.1

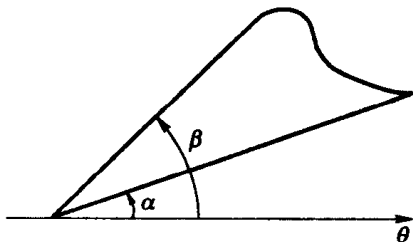


图 3.5.2

其中 $r(\theta)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的连续可微函数, 则弧微元 ds 为

$$ds = \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta,$$

弧长 s 公式为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

(3) 参数方程之下

设曲线的参数方程为(图 3.5.3)

$$x = x(t), y = y(t), \quad t_0 \leq \theta \leq T,$$

其中 $x(t)$ 、 $y(t)$ 是 $[t_0, T]$ 上的连续可微函数, 则弧微元 ds 为

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt,$$

弧长 s 公式为

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

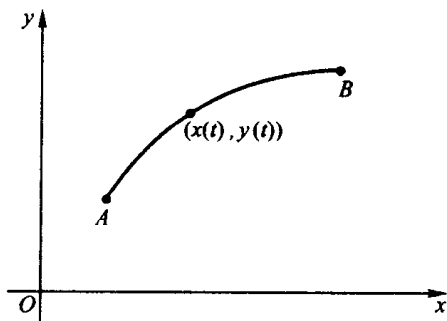


图 3.5.3

(4) 用第一型曲线积分表示

设平面曲线 Γ 的始点与终点分别为 A 、 B , 则其长度 s 可用第一型曲线积分表示

$$s = \int_{\Gamma} ds = \int_{AB} ds.$$

2. 空间曲线的长度

空间曲线的长度常常化为参数形式来处理.

(1) 参数方程之下

设曲线的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t_0 \leq \theta \leq T,$$

其中 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 是 $[t_0, T]$ 上的连续可微函数, 则弧微元 ds 为

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt,$$

弧长 s 公式为

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

(2) 用第一型曲线积分表示

设空间曲线 Γ 的始点与终点分别为 A 、 B , 则其长度 s 可用第一型曲线积分表示

$$s = \int_{\Gamma} ds = \int_{AB} ds.$$

下面给出一些常用的曲线方程及其图形(求它们的长度留作习题).

④ 圆外旋轮线(图 3.5.7)

$$\begin{cases} x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t], \\ y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t], \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

其中 $a > 0, m > 0$. 当 $m = 1$ 时是心脏线(图 3.5.8); $m = \frac{1}{3}$ 时是蚶线(图 3.5.9).

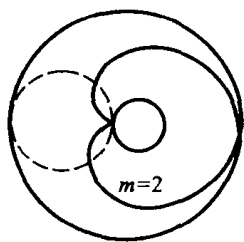


图 3.5.7

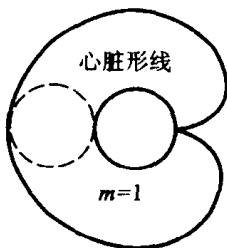


图 3.5.8

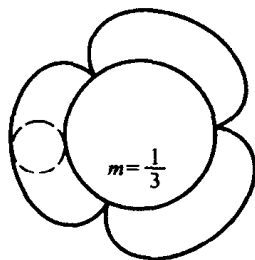


图 3.5.9

⑤ 圆内旋轮线(图 3.5.10)

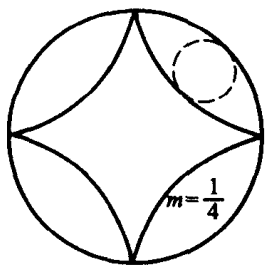


图 3.5.10

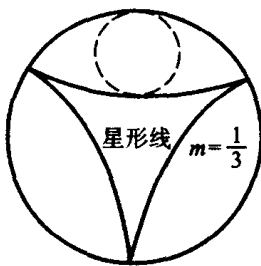


图 3.5.11

$$\begin{cases} x = a[(1-m)\cos mt + m\cos(1-m)t], \\ y = a[-(1-m)\sin mt + m\sin(1-m)t], \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

其中 $a > 0, 1 > m > 0$. 当 $m = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ 时是星

形线(图 3.5.11).

⑥ 阿基米德螺线(图 3.5.12)

$$r = a\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \infty,$$

其中 $a > 0$.

⑦ 双曲螺线(图 3.5.13)

$$r = \frac{a}{\theta}, \quad 0 < \theta \leq \infty,$$

其中 $a \geq 0$.

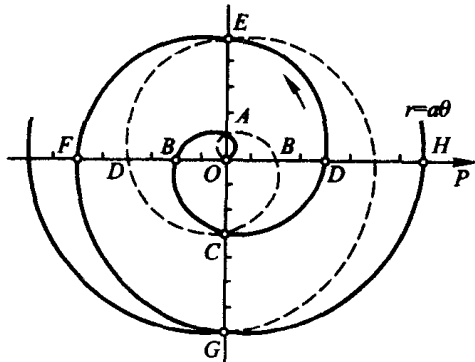


图 3.5.12

所得的旋转面的面积 S 为

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx;$$

这里假设 $f(x)$ 连续可微(图 3.5.17).

由曲线 $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, 绕 Oy 轴旋转所得的旋转面的面积 S 为

$$S = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy;$$

这里假设 $g(x)$ 连续可微.

② 若平面曲线的参数式为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

绕 Ox 轴旋转所得的旋转面面积 S 为

$$\begin{aligned} S &= \int_a^\beta 2\pi y ds \\ &= \int_a^\beta 2\pi y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt; \end{aligned}$$

绕 Oy 轴旋转所得的旋转面面积 S_1 为

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^\beta 2\pi x ds \\ &= \int_a^\beta 2\pi x(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

③ 平面曲线的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, 绕极轴旋转所得的旋转面面积 S 为

$$S = \int_a^\beta 2\pi r(\theta) \sin \theta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

(2) 柱面面积

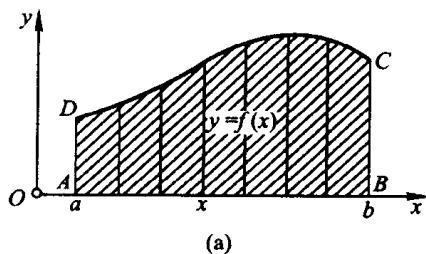
以 xOy 平面上的曲线 Γ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq T$$

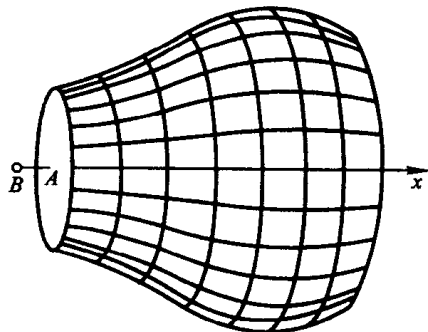
为准线, 其中 $x(t)$ 、 $y(t)$ 连续可微, 母线 l 平行于 Oz 轴, 则柱面面积 S 为

$$S = \int_{t_0}^T z(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt,$$

其中 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ 为柱面上与每一条母线相交的曲线(图 3.5.18).



(a)



(b)

图 3.5.17

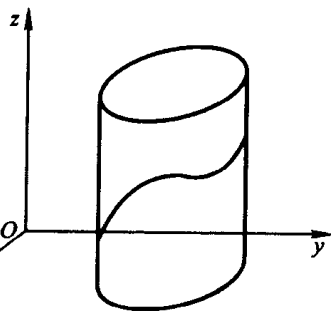


图 3.5.18

(3) 一般曲面面积

设曲面 $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ 的参数式为

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in \Delta,$$

其中 $x(u, v)$ 、 $y(u, v)$ 、 $z(u, v)$ 为 Δ 上的连续可微函数, 则 Σ 的面积 S 为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Sigma} dS \\ &= \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \\ &= \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} du dv, \end{aligned}$$

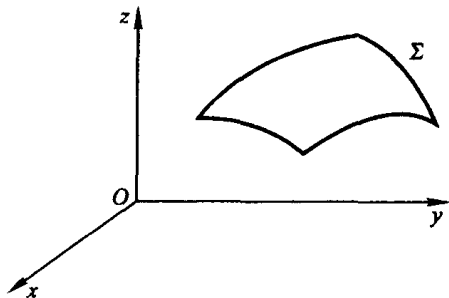


图 3.5.19

见图 3.5.19. 此公式已经在第一型曲面积分中给出, 参看公式(3.4.24).

4. 空间立体的体积**(1) 旋转体的体积**

由平面曲线 $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, 绕 Ox 轴旋转所得的旋转体的体积 V 为

$$V = \int_a^b \pi [y(x)]^2 dx,$$

见图 3.5.17. 此公式可推广到一般平面曲线绕中心轴旋转所得旋转体的体积.

(2) 利用二重积分求体积

曲顶柱体 Ω (图 3.3.1) 的顶盖为 $z = z(x, y)$, 在平面 xOy 的投影为 D_{xy} , 则其体积 V 为

$$V = \iint_{D_{xy}} z(x, y) dx dy.$$

(3) 利用三重积分求体积

空间立体 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ (图 3.3.11) 的体积 V 为

$$V = \iiint_{\Omega} dV,$$

当我们将立体 Ω 的表示式代入公式, 通过计算便可得到其体积 V .

(4) 利用横截面积求体积

设空间立体 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 被平面 $x = x$ 所截的横截面的面积为 $S(x)$ (图 3.5.20), 则 Ω 的体积 V 为

$$V = \int_a^b S(x) dx;$$

类似地, 若平面 $y = y$ 、 $z = z$ 所截的横截面的面积为分别为 $S_1(y)$ 、 $S_2(z)$, 则

$$V = \int_c^d S_1(y) dy;$$

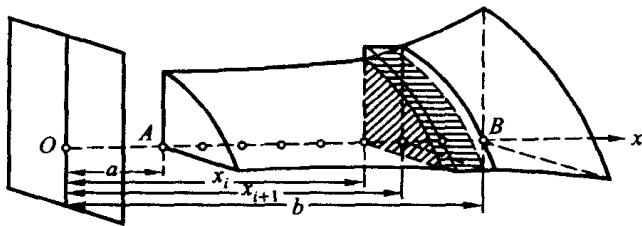


图 3.5.20

或

$$V = \int_h^k S_2(z) dz.$$

请读者通过习题,练习使用这些公式.

3.5.2 力、力矩、惯性矩、转动惯量

1. 引力、压力、功

① 引力问题

长为 l 、质量为 M 、中心在 a ($> \frac{l}{2}$) 的杆(图 3.5.21), 与杆在同一直线上、位于原点的一个质点, 其质量为 m . 于是, 杆对质点的引力 F 为

$$F = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} km \frac{M}{l} \frac{1}{x^2} dx = \frac{4kmM}{4a^2 - l^2}.$$

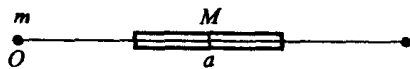


图 3.5.21

密度为 $\rho(x, y, z)$ 的空间立体 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 对立体外一质量为 m 的质点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 的引力 $F = (P, Q, R)$ 为

$$P(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_{\Omega} km\rho(x, y, z) \frac{x - \xi}{r^3} dx dy dz,$$

$$Q(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_{\Omega} km\rho(x, y, z) \frac{y - \eta}{r^3} dx dy dz,$$

$$R(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_{\Omega} km\rho(x, y, z) \frac{z - \zeta}{r^3} dx dy dz,$$

其中 $r = \left(\frac{x - \xi}{r}, \frac{y - \eta}{r}, \frac{z - \zeta}{r} \right)$ 为径向(图 3.5.22),

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

进而, 立体 Ω 在 A 点的位势 W 为

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_{\Omega} \frac{m\rho}{r} dV$$

$$= \iiint_{\Omega} \frac{m\rho dV}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}},$$

并且还有

$$P = \frac{\partial W}{\partial \xi}, Q = \frac{\partial W}{\partial \eta}, R = \frac{\partial W}{\partial \zeta}.$$

② 压力问题

一闸门呈等腰梯形, 其上底长 $2b$ 、下底长 $2a$ ($a < b$)、高 $2h$, 如图 3.5.23; 若密度为 ρ 的液体在 y 处的压强为 $p(y)$, 那么, 在 $y = y$ 的截面所受的压力 $P(y)$ 为

$$P(y) = \int_{-h}^0 p(y) 2x(y) dy,$$

其中 $p(y) = -y\rho g$, $x(y) = b + \frac{b-a}{h}y$.

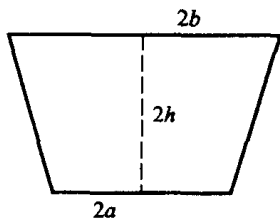


图 3.5.23

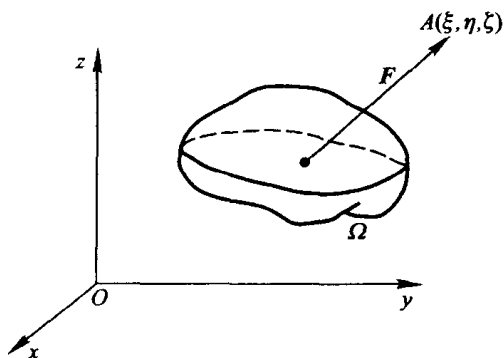


图 3.5.22

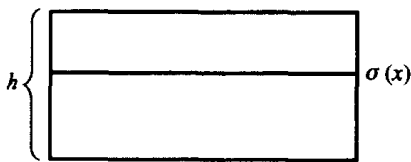


图 3.5.24

③ 做功问题

水池深 h , 盛满水, 水下深 x 处水池横截面积为 $\sigma(x)$ (图 3.5.24). 若从上部抽水, 则所作的功 W 为

$$W = - \int_h^0 \rho g x \sigma(x) dx = \rho g \int_0^h x \sigma(x) dx.$$

2. 质量、质心、静力矩

(1) 质量

① 有限个质点的系统

设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 为有限个质点所成的质点系统 (图 3.5.25), 每个质点的坐标为 $A_i(x_i, y_i, z_i)$, 若质点密度分布为 $\rho(A_i) = m_i$, $A_i \in A$, 则系统的质量 m 为

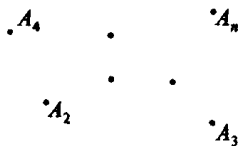


图 3.5.25

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

② 直线段 $[a, b]$ 的质量

若直线段 $[a, b]$ (图 3.5.26) 的密度为 $\rho(x)$, $x \in [a, b]$, 则 $[a, b]$ 的质量 m 为

$$m = \int_a^b \rho(x) dx.$$

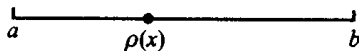


图 3.5.26

③ 曲线 l 的质量

平面曲线 l (图 3.5.27) 以 A, B 为端点, 密度为 $\rho(x, y)$, $(x, y) \in l$, 则其质量 m 为

$$m = \int_l \rho(x, y) ds,$$

这里积分是平面第一型曲线积分.

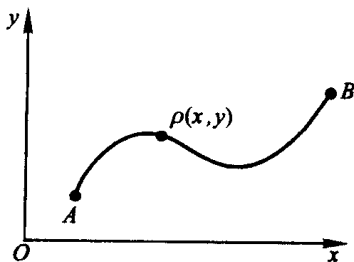


图 3.5.27

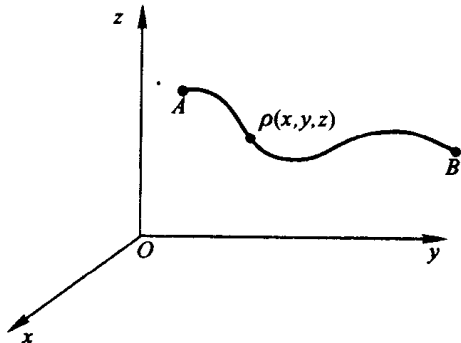


图 3.5.28

空间曲线 l (图 3.5.28) 以 A, B 为端点, 密度为 $\rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in l$, 则其质量 m 为

$$m = \int_l \rho(x, y, z) ds,$$

这里积分是空间第一型曲线积分.

④ 平面区域 D 的质量

平面区域 D 的密度为 $\rho(x, y)$, $(x, y) \in D$ (图 3.5.29), 则 D 的质量为

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy,$$

这里积分是 D 上的二重积分.

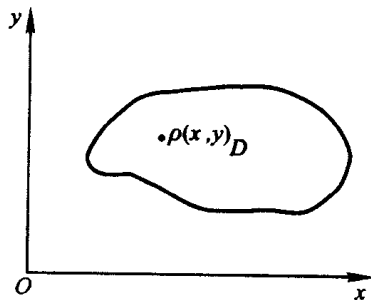


图 3.5.29

⑤ 空间曲面 Σ 的质量

空间曲面 Σ 的密度为 $\rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Sigma$

$\in \Sigma$ (图 3.5.30), 则 Σ 的质量为

$$m = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS,$$

这里积分是 Σ 上的第一型曲面积分.

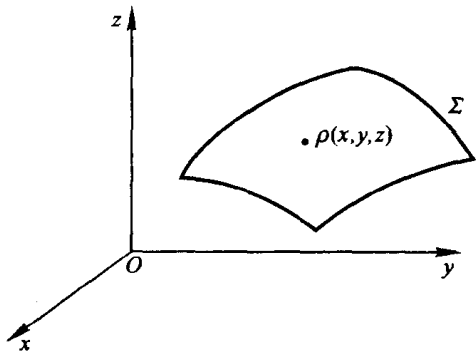


图 3.5.30

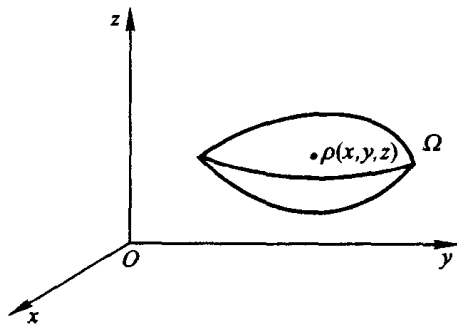


图 3.5.31

⑥ 空间立体 Ω 的质量

空间立体 Ω 的密度为 $\rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$ (图 3.5.31), 则 Ω 的质量为

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV,$$

这里积分是 Ω 上的三重积分.

(2) 静力矩、质心

一个质点 A 关于直线 L 的静力矩 J 定义为质点 A 到 L 的距离 d 与质点质量 m 的乘积 $J = md$.

① 平面上有限个质点的系统 A 的静力矩、质心

设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 为有限个质点所成的质点系统 (图 3.5.32), 每个质点的坐标为 $A_i(x_i, y_i)$, 若质点密度分布为 $\rho(A_i) = m_i$, $A_i \in A$, 则系统 A 关于 Ox 轴的静力矩 J_x 为

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i;$$

A 关于 Oy 轴的静力矩 J_y 为

$$J_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

系统 A 的质心定义为: 若把系统的全部质量集中到一个点 M , 则 M 的静力矩等于系统的静力矩, 我们称此点 M 为系统的质心.

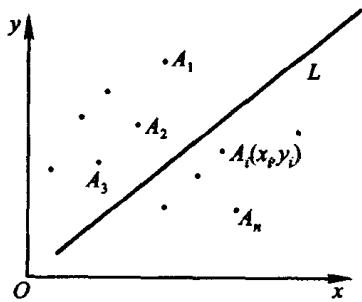


图 3.5.32

设系统 A 的质心为 $\bar{M}(\xi, \eta)$, 则

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{J_x}{m}, \frac{J_y}{m} \right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right).$$

② 平面上弧段 AB 的静力矩、质心

平面曲线 AB 以 A, B 为端点, 密度为 $\rho(x, y), (x, y) \in l$, 则其静力矩为

$$J_x = \int_{AB} y \rho(x, y) ds; \quad J_y = \int_{AB} x \rho(x, y) ds;$$

其中的积分是第一型曲线积分. AB 的质心为 $\bar{M}(\xi, \eta)$, 则

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{\int_{AB} x \rho(x, y) ds}{\int_{AB} \rho(x, y) ds}, \frac{\int_{AB} y \rho(x, y) ds}{\int_{AB} \rho(x, y) ds} \right).$$

③ 平面上区域 D 的静力矩、质心

平面区域 D 的密度为 $\rho(x, y), (x, y) \in l$, 则其静力矩为

$$J_x = \iint_D y \rho(x, y) dx dy; \quad J_y = \iint_D x \rho(x, y) dx dy;$$

其中的积分是二重积分. D 的质心为 $\bar{M}(\xi, \eta)$, 则

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{\iint_D x \rho(x, y) ds}{\iint_D \rho(x, y) ds}, \frac{\iint_D y \rho(x, y) ds}{\iint_D \rho(x, y) ds} \right).$$

④ 空间弧段 l 的静力矩、质心

空间曲线 l 以 A, B 为端点, 密度为 $\rho(x, y, z), (x, y, z) \in l$, 则其关于平面 xOy, yOz, zOx 的静力矩分别为

$$J_{xy} = \int_{AB} z \rho(x, y, z) ds; \quad J_{yz} = \int_{AB} x \rho(x, y, z) ds; \quad J_{zx} = \int_{AB} y \rho(x, y, z) ds,$$

其中的积分是空间第一型曲线积分. AB 的质心为 $\bar{M}(\xi, \eta, \zeta)$, 则

$$(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{\int_{AB} x \rho(x, y, z) ds}{\int_{AB} \rho(x, y, z) ds}, \frac{\int_{AB} y \rho(x, y, z) ds}{\int_{AB} \rho(x, y, z) ds}, \frac{\int_{AB} z \rho(x, y, z) ds}{\int_{AB} \rho(x, y, z) ds} \right).$$

还可求空间曲线 l 关于 x 轴、 y 轴、 z 轴的静力矩, 分别为

$$J_x = \int_{AB} \sqrt{y^2 + z^2} \rho(x, y, z) ds,$$

$$J_y = \int_{\widehat{AB}} \sqrt{z^2 + x^2} \rho(x, y, z) ds,$$

$$J_z = \int_{\widehat{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} \rho(x, y, z) ds.$$

同样地,我们可用各种类型的积分表示空间曲面 Σ 与空间立体 Ω 的静力矩与质心,这里不再赘述,读者可通过习题熟悉它们.

(3) 转动惯量(惯性矩)

一个质点 A 关于直线 L 的惯性矩 G 定义为质点 A 到 L 的距离平方 d^2 与质点质量 m 的乘积 $I = md^2$.

① 平面上有限个质点的系统 S 的惯性矩

设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 为有限个质点所成的质点系统,每个质点的坐标为 $A_i(x_i, y_i)$,若质点密度分布为 $\rho(A_i) = m_i, A_i \in A$,则系统 A 关于直线 l 的惯性矩 I_l 为

$$I_l = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2;$$

关于 x 轴与 y 轴的惯性矩分别为

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2; \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2.$$

② 弧段 $\widehat{AB}$ 的惯性矩

平面曲线 $\widehat{AB}$ 以 A, B 为端点,密度为 $\rho(x, y), (x, y) \in l$,则其惯性矩为

$$I_x = \int_{\widehat{AB}} y^2 \rho(x, y) ds; \quad J_y = \int_{\widehat{AB}} x^2 \rho(x, y) ds;$$

其中的积分是第一型曲线积分.

空间曲线 l 以 A, B 为端点,密度为 $\rho(x, y, z), (x, y, z) \in l$,则其关于平面 xOy, yOz, zOx 的惯性矩分别为

$$I_{xy} = \int_{\widehat{AB}} z^2 \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{yz} = \int_{\widehat{AB}} x^2 \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{zx} = \int_{\widehat{AB}} y^2 \rho(x, y, z) ds,$$

其中的积分是空间第一型曲线积分.

还可求空间曲线 l 关于 x 轴、 y 轴、 z 轴的惯性矩,它们分别为

$$I_x = \int_{\widehat{AB}} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_y = \int_{\widehat{AB}} (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_z = \int_{AB} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds.$$

我们同样可用各种类型的积分表示空间曲面 Σ 与空间立体 Ω 的惯性矩, 这里从略.

3.5.3 场论——梯度、散度、旋度

格林公式、斯托克斯公式与高斯公式揭示了曲线积分、曲面积分、二重积分、三重积分之间的本质联系, 在理论上是积分学中的极其深刻的定理. 不仅如此, 它们还更清晰、更简洁地反映了客观世界存在着的自然规律, 我们用梯度、散度、旋度的概念以及场的理论, 简称场论, 进一步来刻画这三个定理.

定义 3.5.1(场) 如果对于空间 $\mathbf{R}^3$ 中任一点 $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, 都有一个物理量的确定值与之对应, 则称在该空间中定义了该物理量的场.

场, 可分为数量场

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

与向量场

$$\mathbf{A}(x, y, z) \equiv (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 也简记为 $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, 或 $\mathbf{A}$.

定义 3.5.2(梯度) 在 $\mathbf{R}^3$ 上给定数量场 $u = f(x, y, z)$, 我们称向量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

为函数 u 的梯度, 记为 $\text{grad} f$.

在多元函数微分学部分, 我们已经引入了梯度的概念, 并且已经证明, 沿单位向量 $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 数量场 $f(x, y, z)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma, \quad (3.5.1)$$

而梯度 $\text{grad} f$ 是使 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}$ 取最大值的方向, 其长度 $|\text{grad} f|$ 则是方向导数 (3.5.1) 的最大值. 采用奈布拉符号 ∇ , 它可视为一个向量算子

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (3.5.2)$$

于是, $\text{grad} f = \nabla f$.

现在引入另一个重要概念——散度.

定义 3.5.3(散度) 在 $\mathbf{R}^3$ 上给定向量场 $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, 我们称数量场

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

为向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 的散度, 记为 $\text{div} \mathbf{A}$, 或 $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

为了理解散度 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ 的物理意义, 我们假设 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 是分布在区域 $G \subset \mathbf{R}^3$ 上的速度场, $\Sigma \subset G$ 是逐片光滑的封闭曲面. 于是, 单位时间内速度场 $\mathbf{A}$ 通过 Σ 外侧的流量 (又称通量) q 为

$$q = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS,$$

这里 $\mathbf{e}$ 是曲面 Σ 外侧的单位法向量. 由于 Σ 是封闭的, 流量 q 应当是单位时间内流出 Σ 的流量 (取正值) 与流入 Σ 的流量 (取负值) 的代数和. 当 $q > 0$ 时, 表示流体流出 Σ 比流入 Σ 的量多, 此时曲面 Σ 内部有“源”, 从“源”中向外发散出流体; 当 $q < 0$ 时, 表示流体流出 Σ 比流入 Σ 的量少, 此时曲面 Σ 内部有“洞”, 流体向洞内渗漏.

一般地, 我们给出如下定义.

定义 3.5.4 (发散量) 假设 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 是分布在区域 $G \subset \mathbf{R}^3$ 上的向量场, $\Sigma \subset G$ 是逐片光滑的封闭曲面, $\mathbf{e}$ 是曲面 Σ 外侧的单位法向量, Σ 所围的区域为空间立体 Ω , Ω 的体积为 V . 对任一点 $M \in \Omega$, 我们称比值

$$\frac{\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS}{V}$$

为向量场 $\mathbf{A}$ 在区域 Ω 上的平均发散量. 当曲面 Σ 收缩到点 M (记为 $\Sigma \rightarrow M$) 时, 若极限

$$\lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS}{V}$$

存在且为有限数, 则称此极限值为向量场 $\mathbf{A}$ 在点 M 的发散量, 或简称为向量场 $\mathbf{A}$ 的发散量.

发散量是数量, 它与坐标系的选取无关.

下面的定理揭示了向量场 $\mathbf{A}$ 的散度与其发散量之间的关系.

定理 3.5.1 (散度公式) 设向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 连续可微, 则 $\mathbf{A}$ 在点 M 的散度等于它在 M 点的发散量, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(M) = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS}{V}$$

证 记

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (P, Q, R),$$

则

$$q = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS = \iint_{\Sigma \text{ 外侧}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

应用高斯公式与三重积分中值定理, 得

$$q = \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right\} dV = \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right\} \bigg|_{M'} \cdot V,$$

这里 $M' \in \Omega$, 当 $\Sigma \rightarrow M$ 时, $M' \rightarrow M$, 于是

$$\lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{1}{V} \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right\} \bigg|_{M'} = \operatorname{div} \mathbf{A}(M).$$

应用散度记号, 高斯定理可写为如下的向量形式.

定理 3.5.2 (高斯定理) 设向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 为连续可微的, Σ 是场中逐片光滑的封闭曲面, $\mathbf{e}$ 是 Σ 外侧的单位法向量, Σ 所围的区域为 Ω , 则有高斯公式

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dV.$$

由此可以看出, 高斯定理的物理意义是: 单位时间内, 向量通过封闭曲面外侧的流量等于曲面所围区域的发散量的总和.

例 1 一电量为 q 的电荷位于坐标原点, 在空间产生电场强度, 其场强为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r}, \quad r \neq 0,$$

这里 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}|$. 设 Σ 是场中任一封闭曲面 (原点 $O \in \Sigma$), 试求场强 $\mathbf{E}$ 的散度与场强 $\mathbf{E}$ 通过 Σ 外侧的通量.

解 场强 $\mathbf{E}$ 的散度为

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \nabla \frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} \right), \end{aligned}$$

由于 $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$, $\nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4} \nabla r$, $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, 所以

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) = 0.$$

设 Σ 所围的区域为 Ω , Σ 外侧的单位法向量为 $\mathbf{e}_r$. 若原点 O 在 Σ 的外部, 则 $\mathbf{E}$ 通过 Σ 外侧的通量为

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 0;$$

若原点 O 在 Σ 的内部, 以 O 为球心, δ 为半径 (δ 充分小), 在 Σ 的内部作一球面 Σ_{δ} , Σ_{δ} 外侧的单位法向量也记为 $\mathbf{e}_r$, 在 Σ 与 Σ_{δ} 所围的区域上应用高斯公式, 得

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r dS - \iint_{\Sigma_{\delta}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r dS = 0.$$

由于在 Σ_δ 上, $\mathbf{e}_r = \frac{1}{r}\mathbf{r}$, 所以通过 Σ 外侧的通量为

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r dS &= \iint_{\Sigma_\delta} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r dS = \frac{q}{4\pi\epsilon} \iint_{\Sigma_\delta} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \frac{1}{r} \mathbf{r} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \iint_{\Sigma_\delta} \frac{1}{r^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon\delta^2} 4\pi\delta^2 = \frac{q}{\epsilon}.\end{aligned}$$

此例的结果表明:在点电荷 q 产生的静电场中,通过包围 q 的任何封闭曲面的电通量都等于 $\frac{q}{\epsilon}$. 这就是电学中的高斯定理.

定义 3.5.5(旋度) 对于向量场 $\mathbf{A}$, 我们定义

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

为向量场 $\mathbf{A}$ 的旋度.

现在来看旋度的物理意义. 设 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 是分布区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 上的向量场, 点 $M \in \Omega$, 在点 M 作一单位向量 $\mathbf{e}$, 过点 M 以此单位向量为法向量作平面, 在此平面上围绕点 M 作光滑的简单闭曲线 Γ , 取 Γ 的正向 Γ^+ (图 3.5.33).

在物理学中, 称曲线积分

$$\int_{\Gamma^+} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

为向量场 $\mathbf{A}$ 沿 Γ^+ 的循环量.

符号 Ω 、 $\mathbf{A}$ 、 M 、 $\mathbf{e}$ 、 Γ^+ 的含义仍如上. 设 Γ^+ 所围的平面区域 Σ^* (按右旋规则由 $\mathbf{e}$ 决定的一侧) 的面积为 σ , 我们称比值

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma^+} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

为向量场 $\mathbf{A}$ 在区域 Σ^* 上沿方向 $\mathbf{n}$ 的平均旋转强度. 当曲线 Γ^+ 收缩到点 M (记为 $\Gamma \rightarrow M$) 时, 若极限

$$\lim_{\Gamma \rightarrow M} \frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma^+} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

为有限数, 则称此极限值为向量场 $\mathbf{A}$ 在点 M 沿方向 $\mathbf{n}$ 的旋转强度, 记为 L_n , 显然 L_n 与方向 $\mathbf{n}$ 有关. 若向量场 $\mathbf{A}$ 在点 M 沿某方向 $\mathbf{n}$ 的旋转强度取最大值 $\max_n L_n$, 则称以 $\max_n L_n$ 为模且与 $\mathbf{n}$ 同方向的向量为 $\mathbf{A}$ 在点 M 的旋转向量. 如此定义的旋转向量与旋度 $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ 一致.

旋转向量是向量, 它与坐标系的选取无关.

下面定理揭示了向量场 $\mathbf{A}$ 的旋度与向量场 $\mathbf{A}$ 的旋转向量之间的等价关系.

定理 3.5.3(旋度与旋转向量) 设向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 连续可微, 则向量场 $\mathbf{A}$

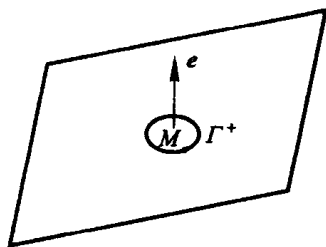


图 3.5.33

在点 M 的旋度等于向量场 A 在点 M 的旋转量.

证 令

$$A(x, y, z) = (P, Q, R), \quad e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

则由斯托克斯定理与第一型曲面积分的中值定理可得

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} A \cdot dr &= \int_{\Gamma^+} P dx + Q dy + R dz \\ &= \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS \\ &= \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} A \cdot e dS = \operatorname{rot} A \cdot e|_M \cdot \sigma, \end{aligned}$$

这里 $M' \in \Sigma$, 当 $\Gamma \rightarrow M$ 时, $M' \rightarrow M$, 于是

$$L_n = \lim_{\Gamma \rightarrow M} \frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma^+} A \cdot dr = (\operatorname{rot} A \cdot e)|_M = |\operatorname{rot} A(M)| \cos \theta,$$

其中 θ 为向量 $\operatorname{rot} A(M)$ 与 e 的夹角. 显然有

$$\max_n L_n = |\operatorname{rot} A(M)|,$$

且此时 $\cos \theta = 1$, 即最大旋转强度的方向应与 $\operatorname{rot} A(M)$ 同方向, 这表明向量场 A 在点 M 的旋转量等于向量场 A 在点 M 的旋度.

注 由于

$$L_n = \operatorname{rot} A(M) \cdot e = \operatorname{Proj}_n(\operatorname{rot} A(M)),$$

所以向量场 A 在点 M 沿方向 e 的旋转强度 L_n 等于旋度 $\operatorname{rot} A(M)$ 在方向 n 上的投影.

应用向量记号, 斯托克斯定理可写为向量形式.

定理 3.5.4 (斯托克斯定理) 设向量场 $A(x, y, z)$ 为连续可微的, Γ 是场中逐段光滑的简单闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的逐片光滑的非封闭的双侧曲面, Γ^+ 与 Σ 的定侧 Σ^+ 服从右旋规则, e 为 Σ^+ 的单位法向量, 则有斯托克斯公式

$$\int_{\Gamma^+} A \cdot dr = \iint_{\Sigma^+} \operatorname{rot} A \cdot e dS = \iint_{\Sigma^+} \nabla \times A \cdot e dS.$$

由此定理可以看出, 斯托克斯定理的物理意义是: 向量场在曲面上沿曲面法向的旋转强度的总和等于该向量场沿曲面的边界曲线正向的循环量.

旋度只有一个重要的应用, 那就是用来刻画刚体运动的速度场 v 与其瞬时角速度 ω 的关系: $\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v$.

现在我们研究两类特殊的向量场, 一类是无“源”、无“洞”的“无源场”, 一类是旋转强度恒等于零的“无旋场”.

定义 3.5.6(无源场) 设向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 在体单连通域 Ω 内连续可微, 若在该场中恒有

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

则称向量场 $\mathbf{A}$ 为无源场.

在无源场 $\mathbf{A}$ 中, 任取逐片光滑的封闭曲面 Σ , 设 $\mathbf{e}$ 为 Σ 外侧的单位法向量, Σ 所围的立体记为 Ω , 据高斯定理

$$\iint_{\Sigma^{\text{外侧}}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dV = 0.$$

这表明在无源场中, 通过任一封闭曲面的流量为零, 因此在该场中无“源”、无“洞”, 故称其为无源场. 我们有下述定理, 证明从略.

定理 3.5.5(无源场的充要条件) 向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 为无源场的充要条件是: 存在向量函数 $\mathbf{B}$, 使得

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

定义 3.5.7(无旋场) 设向量 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 在面连通域 Ω 内连续可微, 若在该场中恒有

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0,$$

则称向量场 $\mathbf{A}$ 为无旋场.

在无旋场 $\mathbf{A}$ 中, 任取逐段光滑的简单闭曲线 Γ , 设 Σ 是以 Γ 为边界的逐片光滑的双侧曲面, Γ^+ 与定侧 Σ^+ 服从右旋规则, $\mathbf{e}$ 为 Σ^+ 的单位法向量, 据斯托克斯定理有

$$\int_{\Gamma^+} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma^+} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS = 0.$$

这表明在无旋场中, 通过任一简单闭曲线的循环量为零. 因此该场的旋转强度恒为零, 这正是称其为无旋场的道理.

定理 3.5.6(无旋场的充要条件) 向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 为无旋场的充要条件是: 存在数量函数 $u(x, y, z)$, 使得

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} u,$$

亦即函数 $u(x, y, z)$ 为向量场 $\mathbf{A}$ 的势函数.

证 令 $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, 由于 $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ 等价于

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

据定理 3.4.15, 上列三等式又等价于存在 $u(x, y, z)$, 使得

$$du = Pdx + Qdy + Rdz,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R,$$

所以

$$\mathbf{A} = (P, Q, R) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \text{grad } u.$$

无旋场还有一个等价的表示,那就是保守场.

定义 3.5.8(保守场) 设向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 连续可微,若在该场中,曲线积分

$$\int_{AB} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

与积分路线无关,则称向量场 $\mathbf{A}$ 为保守场.

定理 3.5.7(保守场的充要条件) 向量场 $\mathbf{A}$ 为保守场的充要条件是向量场 $\mathbf{A}$ 为无旋场.

在物理学中,静力场、引力场、重力场等都是保守场.

定义 3.5.9(调和场) 若向量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 是无源场,同时又是无旋场,则称 $\mathbf{A}$ 为调和场.

定理 3.5.8(调和场的势函数) 调和场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 的势函数 $u(x, y, z)$ 满足拉普拉斯(Laplace)方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

证 因为调和场 $\mathbf{A}$ 是无源场,所以 $\text{rot } \mathbf{A} = 0$, 将

$$\mathbf{A} = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

代入上式即得

$$0 = \text{div } \mathbf{A} = \text{div} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

定理得证.

通常称算子

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

为拉普拉斯算子,拉普拉斯方程可简记为

$$\Delta u = 0,$$

并称此方程的解为调和函数.因此,调和场的势函数为调和函数.

最后叙述求势函数的方法.

据定理 3.5.6 的证明,无旋场 $\mathbf{A}(x, y, z) = (P, Q, R)$ 的势函数 $u(x, y, z)$ 满足

$$du = Pdx + Qdy + Rdz,$$

所以,势函数 u 就是 $Pdx + Qdy + Rdz$ 的原函数,据定理 3.4.15 中的公式即可得到求势函数的一个公式

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz,$$

这里 (x_0, y_0, z_0) 是场 A 中任一定点.

例 2 试证由场强

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r}$$

所定义的向量场是调和场, 并求此调和场 E 的势函数(这里 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}|$).

解 由例 1, 我们已经知道 $\operatorname{div} E = 0$, 所以向量场 E 为无源场. 又因

$$\operatorname{rot} E = \nabla \times \left(\frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} \times \mathbf{r} + \nabla \frac{1}{r^3} \times \mathbf{r} \right),$$

由于

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0, \nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4} \nabla r = -\frac{3}{r^5} \mathbf{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r^3} \times \mathbf{r} = -\frac{3}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0,$$

代入前式, 即得 $\operatorname{rot} E = 0$, 因此向量场 E 又是无旋场, 故向量场 E 是调和场.

再求势函数. 记向量场 $E = (P, Q, R)$, 其中

$$P = \frac{qx}{4\pi\epsilon r^3}, Q = \frac{qy}{4\pi\epsilon r^3}, R = \frac{qz}{4\pi\epsilon r^3}.$$

因为

$$E = \operatorname{grad} u$$

等价于

$$du = Pdx + Qdy + Rdz = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} (x dx + y dy + z dz)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon r^3} \cdot \frac{1}{2} d(r^2) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} d(r),$$

对上式积分, 即得向量场 E 的势函数为

$$u = -\frac{q}{4\pi\epsilon r} + C = \frac{-q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C.$$

场论在物理学中的应用是很广泛的, 这里只列举两个例子.

(1) 流体力学的连续性方程

设 $A(x, y, z, t)$ 是分布在空间区域 $G \subset \mathbf{R}^3$ 上的流速场, 流体密度亦随位置和时间而变化, 记为 $\mu(x, y, z, t)$. 任取 $\Sigma \subset G$ 为封闭曲面, Σ 所包围的立体区域记为 Ω , e 是曲面 Σ 外侧的单位法向量, 则经过时间 dt 、通过曲面 Σ 外侧的流体的质量为

$$dt \iint_{\Sigma} \mu \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS.$$

另一方面,从立体 Ω 的质量考虑,在 Ω 内取体积元素 dV ,经过时间 dt ,密度的增量为 $\frac{\partial \mu}{\partial t} dt$,微元 dV 的质量增量为 $\frac{\partial \mu}{\partial t} dt dV$,因而经过时间 dt ,整个区域 Ω 的质量的增量为

$$dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial \mu}{\partial t} dV.$$

由于立体 Ω 的质量的增量等于通过曲面 Σ 内侧的流体的流量,所以

$$dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial \mu}{\partial t} dV = -dt \iint_{\Sigma} \mu \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS,$$

即

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \mu}{\partial t} dV + \iint_{\Sigma} \mu \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} dS = 0.$$

对左边的第二项应用高斯公式得

$$\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \mathbf{A}) \right] dV = 0.$$

由区域 Ω 的任意性,即得

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \mathbf{A}) = 0.$$

此式称为流体动力学连续性方程.

(2) 热传导方程

设 $T(x, y, z, t)$ 是分布在区域 $G \subset \mathbf{R}^3$ 上的温度场,由于场中温度分布不均匀,因此有热量流动.在场中任取封闭曲面 Σ , Σ 所包围的立体区域为 Ω , $\mathbf{e}$ 是 Σ 外侧的单位法向量.在曲面 Σ 上取曲面元素 dS ,据热传导理论中的傅里叶定律:“在温度场中任一点处沿任一方向的热流强度与温度场在该点同一方向的方向导数成正比”,则经过时间 dt ,沿方向 $\mathbf{e}$ 流出曲面微元 dS 的热量为

$$dq = -k dt \frac{\partial T}{\partial n} dS = -k dt \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{e} dS,$$

这里 $k(k > 0)$ 为热传导系数.上式右边的负号表示热流方向与温度的梯度方向相反.所以经过时间 dt 、通过曲面 Σ 外侧的热量为

$$q = -dt \iint_{\Sigma} k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{e} dS.$$

另一方面,取体积元素 $dV \subset \Omega$,由于微元 dV 释放的热量与下降的温度 $-dT = -\frac{\partial T}{\partial t}$ 以及立体的质量 μdV 成正比,即从 dV 中释放的热量为

$$-c dt \mu \frac{\partial T}{\partial t} dV,$$

据热量守恒原理得

$$\iiint_{\Omega} c\mu \frac{\partial T}{\partial t} dV = \iint_{\Sigma} k \text{grad } T \cdot \mathbf{e} dS.$$

对右边的曲面积分应用高斯公式得

$$\iiint_{\Omega} c\mu \frac{\partial T}{\partial t} dV = \iiint_{\Omega} \text{div}(k \text{grad } T) dV.$$

由区域 Ω 的任意性, 即得

$$c\mu \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \text{grad } T).$$

此式称为热传导方程.

习 题

1. 应用格林公式计算:

(1) $\oint_{\Gamma} (x-y)dx + xdy$, 其中 Γ 为 $x+y=1$ 与坐标轴所围区域边界的正向;

(2) $\oint_{\Gamma} (2xy-x^2)dx + (x+y^2)dy$, 其中 Γ 为 $y=x^2, x=y^2$ 所围区域边界的正向.

2. 应用曲线积分计算 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 的面积.

3. 设点 A, B 在 x 轴上, 积分路径 $\widehat{AmB}$ 与段 AB 所围区域的面积为 S , 计算

$$\int_{\widehat{AmB}} e^{xy} [y^2 dx + (1+xy)dy].$$

4. 计算 $\int_{\widehat{AB}} \frac{ydx - xdy}{x^2}$, 其中 $\widehat{AB}$ 为由 $A(\frac{1}{2}, 2)$ 沿 $y = \frac{1}{x}$ 至 $B(2, \frac{1}{2})$.

5. 计算 $\int_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 Γ 为 $x = a(t - \sin t) - a\pi, y = a(1 - \cos t)$ 上从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段弧.

6. 计算 $\int_{\widehat{AmO}} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, 其中 $\widehat{AmO}$ 为由 $A(a, 0)$ 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = ax (a>0)$ 至原点 O .

7. 计算 $\int_{\Gamma} (5xy - e^x \sin y)dy + e^x \cos y dx$, 其中 Γ 为 $x = \sqrt{2y - y^2}$ 上沿 y 增大方向的半圆周.

8. 计算 $\oint_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 Γ 为 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, 取正向 ($a \neq 0$).

9. 求下列表达式的原函数:

(1) $(2xy^3 + y \cos xy)dx + (3x^2 y^2 + x \cos xy + \sin y)dy$;

(2) $yz(2x + y + z)dx + zx(x + 2y + z)dy + xy(x + y + 2z)dz$.

10. 应用斯托克斯公式计算:

(1) $\oint_{\Gamma} yzdx + 3zxdy - xydz$, 其中 Γ 为 $x^2 + y^2 = 4y, 3y - z + 1 = 0$ 的交线, 从 z 轴正向

看去为逆时针方向;

(2) $\oint_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 Γ 为以 $A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a)$ 为顶点的三角形, 从 x 轴正向看去为顺时针方向;

(3) $\oint_{\Gamma} (z^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - x^2) dz$, 其中 Γ 为立方体 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 的表面与平面 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 的交线, 从 x 轴正向看去为逆时针方向;

(4) $\oint_{\Gamma} (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, 其中 Γ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 与 $x^2 + y^2 = 4rx (0 < r < R, z \geq 0)$ 的交线, 从 z 轴正向看去为逆时针方向.

11. 计算 $\int_{\Gamma} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$, 其中 Γ 为从 $A(a, 0, 0)$ 沿螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = t$ 至 $B(a, 0, 2\pi)$.

12. 应用高斯公式计算:

(1) $\oint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧表面;

(2) $\oint_{\Sigma} xz dy dz + yz dz dx + z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, x^2 + y^2 - z^2 = 0 (z \geq 0)$ 所围立体的外侧表面;

(3) $\oint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1, z = \sqrt{2}$ 所围立体的外侧表面.

13. 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 = z^2$ 的 $0 \leq z \leq h$ 部分, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 Σ 外法向的方向余弦.

14. 分别用第一型曲面积分、第二型曲面积分的计算公式以及高斯公式计算

$$\oint_{\Sigma} (ax^2 + by^2 + cz^2) dS,$$

其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧表面.

15. 设 $A = (x^2 + y^2 + z^2)(xi + yj + zk)$, Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, 试计算:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} A dV.$$

16. 设 $A = \{y^2, 1, x^2\}$, Σ 是平面 $x + 2y + 3z = 1$ 界于坐标平面之间的三角形域, 取上侧 (z 轴向上), 试计算:

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} A \cdot e dS.$$

17. 试证下列向量场 A 是无源场.

(1) $A = \{y, y + x, -z\}$;

(2) $A = \{x - y, y + zx, y - 2z\}$.

18. 试证下列向量场 A 是无旋场, 并求势函数.

$$(1) A = \{x^2, -y, z^3\};$$

$$(2) A = \{y^2 + 3xz^2 - 1, 2xy, 2x^2z + z^3\}.$$

§ 3.6 反常积分, 含参量的积分

黎曼积分 $\int_a^b f(x)dx$ 有两个限制: 一是积分区间 $[a, b]$ 为闭区间, 二是被积函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有界函数. 然而, 无论在数学理论或实际应用中, 都会遇到积分区间为无穷区间或被积函数为无界函数的情形, 分别称为无穷区间上的积分和无界函数的积分, 这就引出关于反常积分 (也称广义积分) 的研究.

3.6.1 收敛性与发散性、判别法

1. 无穷区间上的积分

定义 3.6.1 (反常积分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 中有定义, 且对所有 $b, b \geq a$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 (黎曼) 可积. 如果极限 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ 存在且有限, 则称这个极限值为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 的反常积分, 记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx, \quad (3.6.1)$$

并称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

若式 (3.6.1) 右边极限为 ∞ , 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散;

在以上两种情况下, 我们还称 $+\infty$ 为反常积分的奇点.

若式 (3.6.1) 右边极限不存在, 则称反常积分不存在.

类似地, 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 中有定义, 并且对所有 $a, a \leq b$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 (黎曼) 可积. 如果极限 $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$ 存在且有限, 则称这个极限值为 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 的反常积分, 记为

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \equiv \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx, \quad (3.6.2)$$

也称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛;

若式 (3.6.2) 右边极限为 ∞ , 则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散;

在以上两种情况下, 我们也称 $-\infty$ 为反常积分的奇点.

若式 (3.6.2) 右边极限不存在, 则称反常积分不存在.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中有定义, 并且对所有 $a, b, a \leq b, f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 (黎曼) 可积. 任取 $c \in (-\infty, +\infty)$, 若两个反常积分

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx, \int_c^{+\infty} f(x) dx \quad (3.6.3)$$

同时收敛, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;

只要式 (3.6.3) 中有一个积分发散, 就称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的几何意义是:

xOy 平面上由 x 轴、直线 $x=a$ 与 $y=f(x)$ 对应的曲线所围成的向 x 轴正向无限延伸的平面图形 G 的面积数值, 当 $f(x) \geq 0$ 时恰好等于

反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 的值 (图 3.6.1).

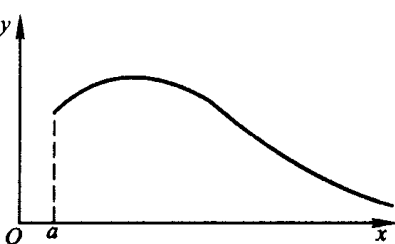


图 3.6.1

假设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$, 则收敛的反常积分的值可由下列公式给出

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a)) = F(x) \Big|_a^{+\infty} = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a),$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (F(b) - F(a)) = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty, a \rightarrow -\infty} (F(b) - F(a)) = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

例 1 求反常积分 $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ 的值.

解 我们有

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

例 2 设 $p \in \mathbb{R}$, 讨论积分

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

的敛散性.

解 当 $p=1$ 时,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = (\ln x) \Big|_1^{+\infty} = +\infty,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 发散.

当 $p \neq 1$ 时,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{-1}{1-p}, & \text{当 } p > 1, \\ +\infty, & \text{当 } p < 1. \end{cases}$$

综上所述, 反常积分 $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

2. 无界函数的积分

定义 3.6.2 (瑕积分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 中连续, 且 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$. 如果极限 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$ 存在且有限, 则定义这个极限值为无界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的反常积分, 称为瑕积分, 也常称为反常积分. 仍用黎曼积分的记号, 记为

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx, \quad (3.6.4)$$

并称瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛; 若式 (3.6.4) 右边极限为 ∞ , 则称瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散; 我们称 b 为瑕积分的奇点 (瑕点). 若式 (3.6.4) 右边极限不存在, 则瑕积分也不存在.

类似地, 设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 中连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$. 如果极限 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$ 存在且有限, 则定义这个极限值为无界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的瑕积分, 仍用黎曼积分的记号, 记为

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx, \quad (3.6.5)$$

并称瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛; 若式 (3.6.5) 右边极限为 ∞ , 则称瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散; 并称 a 为瑕积分的奇点 (瑕点). 若式 (3.6.5) 右边极限不存在, 则瑕积分也不存在.

如果积分的上限 b 与下限 a 都是奇点, 并且在 (a, b) 中没有其他奇点时, 即 $f(x)$ 在 (a, b) 中连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a, b), \quad (3.6.6)$$

当且仅当式 (3.6.6) 右边的两个瑕积分都收敛时, 称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛; 如果式 (3.6.6) 右边的两个反常积分中有一个发散 (或不存在), 则称瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散 (或不存在).

同样, 当 $f(x)$ 有一个原函数为 $F(x)$, 则收敛的反常积分的值可由下列公

式求得

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-0} (F(x) - F(a)) = F(x)|_a^b,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a+0} (F(b) - F(x)) = F(x)|_a^b,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-0, y \rightarrow a+0} (F(x) - F(y)) = F(x)|_a^b.$$

例 3 讨论积分

$$I = \int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} dx$$

的敛散性.

解 因 $x-x^2 = x(1-x)$, 故有两个奇点 $x=0$ 与 $x=1$. 将 I 写成下述形式

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} dx.$$

取 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, 得

$$\int_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} dx = (2\sqrt{x-x^2}) \Big|_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} = 2\left(\sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\epsilon-\epsilon^2}\right),$$

于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} 2\left(\sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\epsilon-\epsilon^2}\right) = 1.$$

类似地,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\epsilon} \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} 2\left\{\sqrt{1-\epsilon-(1-\epsilon)^2} - \sqrt{\frac{1}{4}}\right\} = -1. \end{aligned}$$

最后, 得 $I = 1 - 1 = 0$.

注 在上例中, 反常积分的收敛性不依赖于点 $\frac{1}{2}$ 的选择, 只要在 $(0, 1)$ 中任选一点 $\xi \in (0, 1)$, 可得同样结果.

例 4 讨论积分

$$I = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^k} dx$$

的敛散性.

解 $x=b$ 是惟一的奇点.

当 $k = 1$ 时,

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} \frac{1}{b-x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-\ln |b-x|) \Big|_a^{b-\epsilon} = +\infty;$$

当 $k \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} \frac{1}{(b-x)^k} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{(b-x)^{1-k}}{1-k} \right) \Big|_a^{b-\epsilon} \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{当 } k > 1, \\ \frac{(b-a)^{1-k}}{1-k}, & \text{当 } k < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

综上所述, 当 $k \geq 1$ 时, 积分 I 发散; 当 $k < 1$ 时, 积分 I 收敛.

类似地, 可讨论积分

$$I = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^k} dx$$

的敛散性.

3. 反常积分收敛性判别法

首先我们给出无界区域上的反常积分与无界函数的瑕积分收敛的充分必要条件(判别准则).

定理 3.6.1 (敛散性判别法) 设 $x = b$ (有限或无穷) 为反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的惟一的奇点.

(i) 当 b 为 $+\infty$ 时, 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 当且仅当任给 $\epsilon > 0$, 存在正数 $N > 0$, 使对任意的 $b_1, b_2 > N$, 恒有

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

(ii) 当 b 为有限数时, 瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 当且仅当任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对 $(b-\delta, b)$ 中任意两点 $b_1, b_2 \in (b-\delta, b)$, 恒有

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

证明思路是: 令 $F(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx$, 分别利用极限 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi)$ 或极限 $\lim_{\xi \rightarrow b^-} F(\xi)$ 存在, 再利用数列收敛的柯西(Cauchy)准则, 即可证明, 这里从略.

根据极限运算的性质, 可以证明以下的比较判别法.

定理 3.6.2 (比较判别法) 设 $0 \leq g(x) \leq f(x)$, 点 $x = b$ 是 $\int_a^b f(x) dx$ 与

$\int_a^b g(x)dx$ 的唯一的奇点. 我们有

(i) 若 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛;

(ii) 若 $\int_a^b g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

用定理 3.6.2 还可以证明两个有用的判别法.

定理 3.6.3 (敛散性的充分条件) 设 $f(x) \geq 0, x \in [a, +\infty), a > 0$, 且存在极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = A \quad (0 \leq A \leq +\infty),$$

则

(i) 当 $p > 1, 0 \leq A < +\infty$ 时, 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(ii) 当 $p \leq 1, 0 < A \leq +\infty$ 时, 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

证 任给 $\epsilon > 0$, 存在正数 $\delta > 0$, 使当 $x > \delta$ 时, 有

$$|x^p f(x) - A| < \epsilon.$$

即 $A - \epsilon < x^p f(x) < A + \epsilon$, 或

$$0 \leq f(x) < \frac{A + \epsilon}{x^p}.$$

由例 2 知道, 当 $p > 1$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{A + \epsilon}{x^p} dx$ 收敛, 于是由定理 3.6.2 可得反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(ii) 的证明留给读者.

定理 3.6.4 (敛散性的充分条件) 设 $f(x) \geq 0, x \in [a, b), b$ 是瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 唯一的奇点, 且存在极限

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^\lambda f(x) = A \quad (0 \leq A \leq +\infty),$$

则

(i) 当 $\lambda < 1, 0 \leq A < +\infty$ 时, 瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ii) 当 $\lambda \geq 1, 0 < A \leq +\infty$ 时, 瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

证 任给 $\epsilon > 0$, 存在正数 $\delta > 0$, 使当 $x \in (b - \delta, b)$ 时, 有

$$A - \epsilon < (b-x)^\lambda f(x) < A + \epsilon.$$

再取 $b - \delta < c < b$, 当 $x \in (c, b)$ 时, 有

$$0 \leq f(x) < \frac{A + \varepsilon}{(b-x)^\lambda}.$$

由例 4 知道, 当 $\lambda < 1$ 时, $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda} dx$ 收敛, 于是由定理 3.6.2 可得反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.

(ii) 的证明也留给读者.

注 对 $x = a$ 是惟一反常点的情形, 只要将定理中的极限条件换为

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^\lambda f(x) = A \quad (0 \leq A \leq +\infty),$$

定理仍然成立.

例 5 讨论 $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$ 的收敛性, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

解 无论 α, β 取何实值, 被积函数 $\frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ 在 $[1, +\infty)$ 内连续, 我们对参数 α, β 分三种情形讨论.

(i) 当 $\beta < 0$ 时, $\frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)} \sim \frac{1}{x^\alpha}, x \rightarrow +\infty$;

(ii) 当 $\beta = 0$ 时, $\frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)} = \frac{1}{2x^\alpha}$.

于是, 由例 4 知, 对于 $\beta \leq 0$, 当且仅当 $\alpha > 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$ 收敛;

(iii) 当 $\beta > 0$ 时, $\frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)} \sim \frac{1}{x^{\alpha+\beta}}, x \rightarrow +\infty$. 从而当且仅当 $\alpha + \beta > 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$ 收敛.

特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, 当且仅当 $\beta > 0$ 时, 积分收敛, 并可进行计算

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^\beta)} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{x^\beta(1+x^\beta)} dx = \frac{1}{\beta} \int_1^{+\infty} \frac{dx^\beta}{x^\beta(1+x^\beta)} \\ &= \frac{1}{\beta} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^\beta} - \frac{1}{1+x^\beta} \right) d(x^\beta) = \frac{1}{\beta} \left(\ln \left| \frac{x^\beta}{1+x^\beta} \right| \right)_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\beta} \ln 2. \end{aligned}$$

例 6 讨论 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 的收敛性, 其中 $n > 0$.

解 本题中, $x = 0, +\infty$ 为反常积分的两个奇点. 记

$$I = \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right) \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx = I_1 + I_2.$$

对于第一个无界函数的瑕积分 I_1 , $x = 0$ 为奇点, 我们利用

$$\frac{\ln(1+x)}{x^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}},$$

据例 4 与定理 3.6.4 知, 仅当 $n-1 < 1$, 即 $n < 2$ 时, 瑕积分 I_1 收敛; 而当 $n \geq 2$ 时积分发散.

对于第二个无界区间上的反常积分 I_2 , $x = +\infty$ 为奇点, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \left(\frac{\ln(1+x)}{x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{x^{n-p}} \right) = \begin{cases} 0, & \text{当 } n > p, \\ +\infty, & \text{当 } n \leq p. \end{cases}$$

据定理 3.6.3, 当 $n > 1$ 时, 取 $p, n > p > 1$, 得到积分 I_2 收敛; 当 $n \leq 1$ 时, 取 $p = 1$, 得到 I_2 发散.

综上所述, 反常积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 当 $1 < n < 2$ 时收敛, 其余情形均发散.

4. 反常积分的绝对收敛与非绝对收敛

不难看出, 反常积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛蕴含反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 但反之却不然. 为此, 我们引进关于反常积分绝对收敛的概念.

定义 3.6.3 (反常积分的绝对收敛性) 如果反常积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛, 则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛; 如果 $\int_a^b |f(x)| dx$ 发散, 但 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 非绝对收敛 (也称为条件收敛).

例 7 试证积分 $I = \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx, a > 0$ 绝对收敛.

证 因 $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, 而积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, a > 0$ 收敛, 故积分 $I = \int_a^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$ 收敛, 从而积分 I 绝对收敛.

例 8 试证积分 $I = \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, a > 0$ 非绝对收敛.

证 首先, 我们证明积分 $I = \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛.

事实上, 对于任意的 $b > a$, 由

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx &= \left(\frac{\cos x}{x} \right)_a^b - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= -\frac{\cos b}{b} + \frac{\cos a}{a} - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2} dx, \end{aligned}$$

因为 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\cos b}{b} = 0$, 再由例 7, 知积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ 绝对收敛. 于是, 积分 $I = \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛.

其次, 证明 $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ 发散.

由于

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \left| \frac{\sin^2 x}{x} \right| = \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} \geq 0,$$

又

$$\frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

利用本题前一部分的证法可知, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ 收敛, 而积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ 显然发散, 从而推知积分 $I = \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx$ 发散, 于是积分 $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ 发散. 本题得证.

3.6.2 含参量的积分, 一致收敛概念

一种应用非常广泛的积分是形如 $\int_a^b f(x, y) dx$ 的积分, 其中 $y \in Y$ 看作参数, 因而在积分完成后使得 $\int_a^b f(x, y) dx$ 成为 y 的函数

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in Y, \quad (3.6.7)$$

我们称(3.6.7)为含参量的积分.

1. 含参量的(正常)积分

当积分(3.6.7)为正常积分时, 它的计算可按照定积分进行, 只是把 y 看作常数(参数). 重要的问题是: $F(y)$ 的连续性、可导性、可积性如何? 这里涉及一个重要的概念——一致趋向于极限函数.

定义 3.6.4(一致趋向于极限函数) 设含参量函数 $f(x, y)$ 定义在区域

$$D = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

上. 又对于 $y_0 \in Y$, 有 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$. 若任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对任何 $x \in X$, 只要 $0 < |y - y_0| < \delta$, 恒有

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad x \in X, \quad (3.6.8)$$

则称 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ 在 X 上一致成立, 或称 $f(x, y)$ 当 $y \rightarrow y_0$ 时(关于 x)一致趋向于极限函数 $\varphi(x)$.

在一致趋向极限函数的假设下,可以得到含参量的积分号下求极限的性质.

定理 3.6.5(积分号下取极限) 设 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, y \in Y\}$$

中对每一个 $y \in Y$ 是 x 的连续函数,且 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 上一致成立. 则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (3.6.9)$$

性质(3.6.9)称为积分号下取极限.

对于积分号下求积分、积分号下求导数,在连续性的假设下,蕴含了所要求的“一致趋向于”,所以我们有

定理 3.6.6(积分号下求积分) 设 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

中连续, $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. 则

(i) $F(y)$ 是 $[c, d]$ 上的连续函数;

$$(ii) \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (3.6.10)$$

(3.6.10)称为积分号下求积分.

定理 3.6.7(积分号下求导数) 设 $f(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$ 在矩形区域

$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

中连续, $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. 则

(i) $F(y)$ 是 $[c, d]$ 上的连续可导函数;

$$(ii) \frac{d}{dy} \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) dx; \quad (3.6.11)$$

(3.6.11)称为积分号下求导数.

2. 含参量的(反常)积分

当积分(3.6.7)为反常积分时, $F(y)$ 的连续性、可导性、可积性的确定较为复杂,除了要求“一致趋向于极限函数”,还需要反常积分的一致收敛性.

定义 3.6.5(含参量反常积分的一致收敛性) 设函数 $f(x, y)$ 定义在无界区域

$$D_0 = \{(x, y): a \leq x < +\infty, y \in Y\}$$

上. 又对于每个 $y \in Y$, 积分 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 存在.

若极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x, y) dx = I(y)$ 关于 $y \in Y$ 一致成立, 则称反常积分

$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in Y$ 一致收敛. 用 $\epsilon - \delta$ 语言, 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $A_0 = A_0(\epsilon) > 0$, 使得对任何 $A > A_0$, 有

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| = \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \epsilon$$

对 $y \in Y$ 一致成立.

同样可定义瑕积分 $\int_a^b f(x, y) dy$ 的一致收敛性.

在一致趋向极限函数与反常积分一致收敛的假设下, 可以得到含参量的积分号下求极限的性质.

定理 3.6.8 (积分号下取极限) 设

(i) $f(x, y)$ 在矩形区域

$$D_0 = \{(x, y) : a \leq x < +\infty, y \in Y\}$$

中对每一个 $y \in Y$, 积分 $\int_a^A f(x, y) dx$ 对任意 $A > a$ 是正常可积的, 且 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ 在 $x \in [a, +\infty)$ 上一致成立;

(ii) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in Y$ 一致收敛.

则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx. \quad (3.6.12)$$

性质(3.6.12)称为含参量反常积分号下取极限.

定理 3.6.9 (积分号下求积分) 设

(i) $f(x, y)$ 在矩形区域

$$D_1 = \{(x, y) : a \leq x < +\infty, c \leq y \leq d\}$$

内是连续函数;

(ii) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in Y$ 一致收敛.

则

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad (3.6.13)$$

性质(3.6.13)称为含参量反常积分号下求积分.

定理 3.6.10 (积分号下求导数) 设

(i) $f(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$ 在矩形区域

$$D_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq +\infty, c \leq y \leq d\}$$

内是连续函数;

(ii) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in Y$ 存在, 且 $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ 关于 $y \in Y$ 一致收敛.

则

$$\frac{d}{dy} \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right\} = \int_a^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) dx; \quad (3.6.14)$$

(3.6.14)称为含参量反常积分号下求导数.

以上定理的证明从略.

例 9 求积分值 $I = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$.

解法 1 引进参数 t , 考虑函数

$$f(x, t) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+t^2)},$$

显然 $f(x, 1) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$. 于是, 利用定理 3.6.5, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int_0^1 \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+t^2)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)(x^2+t^2)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^2-1} \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+t^2} \right) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^2-1} \left(\arctan x - \frac{1}{t} \arctan \frac{x}{t} \right)_0^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^2-1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{t} \arctan \frac{1}{t} \right). \end{aligned}$$

上式关于变量 t 为 $\frac{0}{0}$ 不定型, 利用洛毕达法则, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{2t} \cdot \left[\frac{1}{t^2} \arctan \frac{1}{t} + \frac{1}{t(t^2+1)} \right] \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

解法 2 由不定积分公式知

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^3} \frac{x}{x^2+a^2} + C,$$

取 $a=1$, 得

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \left(\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} \right)_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

例 10 求积分值 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$.

解法 1 设 $\varphi(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$, 此函数在 $x=0, 1$ 两点没有定义, 但是

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{\frac{1}{x}} = b - a,$$

故只要补充定义 $\varphi(0)=0$ 与 $\varphi(1)=b-a$, 就可知 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 因此本题中的积分是正常积分而不是反常积分.

因为 $\varphi(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^t dt$, 利用定理 3.6.6, 积分号下求积分, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left[\int_a^b x^t dt \right] dx = \int_a^b \left[\int_0^1 x^t dx \right] dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{x^{t+1}}{t+1} \right)_0^1 dt = \int_a^b \frac{1}{t+1} dt = \ln |t+1| \Big|_a^b = \ln \left| \frac{b+1}{a+1} \right|. \end{aligned}$$

解法 2 设 $\psi(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, 利用定理 3.6.6 中的积分号下求微分, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(ab)}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{x^b - x^a}{\ln x} \right) dx \\ &= \int_0^1 x^b dx = \left(\frac{x^{b+1}}{b+1} \right)_0^1 = \frac{1}{b+1}. \end{aligned}$$

对上式积分得

$$\psi(a, b) = \ln |b+1| + C(a).$$

为确定 $C(a)$, 由 $\psi(a, a)=0$, 故得 $C(a) = -\ln |a+1|$, 从而

$$I = \psi(a, b) = \ln |b+1| - \ln |a+1| = \ln \left| \frac{b+1}{a+1} \right|.$$

例 11 求积分 $I(t) = \int_0^\pi \ln(1 + t \cos x) dx, |t| < 1$.

解 设 $f(x, t) = \ln(1 + t \cos x)$, 则 $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\cos x}{1 + t \cos x}$, 且 $f, \frac{\partial f}{\partial t}$ 在矩形区域 $D = \{(x, t): 0 \leq x \leq \pi, |t| \leq t^* (< 1)\}$ 上连续, 故可利用定理 3.6.6 积分号下求导数

$$\begin{aligned} I'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^\pi \ln(1 + t \cos x) dx = \int_0^\pi \left(\frac{d}{dt} \ln(1 + t \cos x) \right) dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + t \cos x} dx = \frac{1}{t} \int_0^\pi \left(1 - \frac{1}{1 + t \cos x} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{t} - \frac{1}{t} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{1+t \cos x} \right) dx.$$

作万能代换 $\tan \frac{x}{2} = u$, 则

$$\begin{aligned} I'(t) &= \frac{\pi}{t} - \frac{2}{t} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t) + (1-t)u^2} du \\ &= \frac{\pi}{t} - \frac{2}{t} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(\arctan \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} u \right)_{u=0}^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{t} - \frac{\pi}{t} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi(\sqrt{1-t^2}-1)}{t\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{-\pi t}{\sqrt{1-t^2}(\sqrt{1-t^2}+1)}, \end{aligned}$$

即

$$I'(t) = \frac{-\pi t}{\sqrt{1-t^2}(\sqrt{1-t^2}+1)},$$

由此积分可得

$$I(t) = \pi \ln(\sqrt{1-t^2}+1) + C.$$

由 $I(0)=0$, 得 $C = -\pi \ln 2$. 最后, 得

$$I(t) = \pi \ln(\sqrt{1-t^2}+1) - \pi \ln 2 = \pi \left\{ \frac{\ln(\sqrt{1-t^2}+1)}{\pi \ln 2} \right\}.$$

例 12 研究 Γ (伽玛, Gamma) 函数 $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0$ 的敛散性.

解 当 $t \geq 1$ 时, $x=0$ 不是积分的奇点; 而当 $0 < t < 1$ 时, $x=0$ 是积分的奇点. 设

$$I_1 = \int_0^1 x^{t-1} e^{-x} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx. \quad (3.6.15)$$

首先考虑 I_2 . 利用定理 3.6.3, 取 $p > 1$, 由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^p \cdot x^{t-1} e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{p+t-1}}{e^x} \right) = 0,$$

因此对于任何 $t > 0$, I_2 都收敛.

其次考虑 I_1 . 当 $t \geq 1$ 时, 积分 I_2 不是反常积分. 当 $0 < t < 1$ 时, 利用定理 3.6.4, 取 $\lambda = 1-t < 1$, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\lambda \cdot x^{t-1} e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1,$$

因此对于任何 $t > 0$, I_1 也都收敛.

综上所述, 对于 $t > 0$, $\Gamma(t)$ 收敛. 我们称 $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0$ 为 Γ

函数, 它在物理及其他科学领域中有着广泛的应用.

Γ 函数有三条重要的性质:

(i) $\Gamma(t)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 中连续, 并有任意阶连续导函数.

事实上, 研究 (3.6.15) 式中两个含参量的反常积分 I_1, I_2 的一致收敛性, 再由定理 3.6.9、3.6.10 便得.

(ii) $\Gamma(1) = 1$.

(iii) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$.

事实上,

$$\begin{aligned}\Gamma(t+1) &= \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b x^t e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\left(-e^{-x} x^t \right) \Big|_0^b + \int_0^b t x^{t-1} e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(t \int_0^b x^{t-1} e^{-x} dx \right) = t\Gamma(t).\end{aligned}$$

我们称性质 (iii) 为 $\Gamma(t)$ 的递推公式. 易见,

$$\Gamma(t+n) = (t+n-1)(t+n-2)\cdots(t+1)\Gamma(t), \quad (3.6.16)$$

取 $t=1$, 得

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 2\Gamma(1) = n!. \quad (3.6.17)$$

例 13 研究 B (贝塔, Beta) 函数 $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ 的性质.

解 B 函数 $B(a, b)$ 的性质有:

(i) $B(a, b)$ 在定义域 $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ 中连续, 并有任意阶连续导函数.

(ii) $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

(iii) $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. (3.6.18)

(iv) $B(a, 1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a)$. (3.6.19)

现在以给出关于含参量积分的莱布尼茨公式作为本小节的结束.

定理 3.6.11 (含参量积分的莱布尼茨公式) 设 $f(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$ 在矩形区域

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

中连续, $\varphi(y), \psi(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上可微, 且 $\varphi(y) \leq b$ 与 $\psi(y) \geq a$. 则对任一个 $y, c < y < d$, 有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx &= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx + f(\varphi(y), y) \varphi'(y) - \\ &\quad f(\psi(y), y) \psi'(y).\end{aligned}$$

3.6.3 斯蒂尔切斯积分

斯蒂尔切斯(T. J. Stieltjes)积分是黎曼积分的一种推广.

定义 3.6.6(黎曼-斯蒂尔切斯积分) 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的两个有界函数, $r = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ 为 $[a, b]$ 的一个分法. 在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 中任取一点 $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n-1$, 作和式

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)].$$

当分法的模 $\lambda(r) = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$ 时, 如果极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \quad (3.6.20)$$

存在且有限, 并与分法 r 以及 ξ_i 的选取无关, 则称此极限为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 $g(x)$ 的黎曼-斯蒂尔切斯积分, 简称为斯蒂尔切斯积分, 或 R-S 积分, 记为 $\int_a^b f(x) dg(x)$, 称和式 σ 为黎曼-斯蒂尔切斯和.

当 $g(x) = x$ 时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 $g(x) = x$ 的黎曼-斯蒂尔切斯积分就是通常的黎曼积分. 黎曼-斯蒂尔切斯积分是从研究一般测度下的积分开始的, 它在现代数学中有重要的应用.

与黎曼积分类似, 可以证明: 当 $g(x)$ 为单调函数时, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 $g(x)$ 的斯蒂尔切斯积分存在的充分必要条件是

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} w_i [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = 0, \quad (3.6.21)$$

这里 w_i 是函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅.

类似地可以定义在无界区域上的或无界函数的黎曼-斯蒂尔切斯反常积分.

黎曼-斯蒂尔切斯积分有如下性质.

定理 3.6.12(R-S 积分的性质) 设 $[a, b]$ 是有限或无穷区间, 则黎曼-斯蒂尔切斯积分具有下述性质

$$(i) \int_a^b dg(x) = g(b) - g(a);$$

$$(ii) \text{ 若 } \int_a^b f_1(x) dg(x), \int_a^b f_2(x) dg(x) \text{ 存在, } \alpha, \beta \text{ 为常数, 则}$$

$$\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) dg(x) = \alpha \int_a^b f_1(x) dg(x) + \beta \int_a^b f_2(x) dg(x);$$

$$(iii) \text{ 若 } \int_a^b f(x) dg_1(x), \int_a^b f(x) dg_2(x) \text{ 存在, 则}$$

$$\int_a^b f(x) d(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)) = \alpha \int_a^b f(x) dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x) dg_2(x);$$

(iv) 设 $g(x)$ 为单调增加函数, 积分 $\int_a^b f(x) dg(x)$ 存在, 则当 $f(x) \geq 0$ 时, 有

$$\int_a^b f(x) dg(x) \geq 0;$$

(v) 设 $g(x)$ 为单调增加函数, 则

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| dg(x);$$

(vi) 设 $a < c < b$, 积分 $\int_a^b f(x) dg(x)$ 存在, 则

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x);$$

(vii) 若积分 $\int_a^b f(x) dg(x)$ 存在, 则分部积分公式成立

$$\int_a^b f(x) dg(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) df(x),$$

这里当 $[a, b]$ 为无限区间时, 还须假设 $f(x)g(x)$ 在 $x \rightarrow \pm \infty$ 时极限存在.

习 题

1. 计算下列反常积分

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/4}}$$

$$(3) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} (a > 0)$$

$$(4) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$$

$$(5) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$(6) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$(7) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

$$(8) \int_{-\infty}^{+\infty} x \sin x dx$$

$$(9) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$$

$$(10) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{(x^4 + 1)^2} dx$$

$$(11) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$(12) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

2. 计算下列反常积分

$$(1) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

$$(2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(3) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$(4) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(5) \int_a^{2a} \frac{dx}{(x-a)^{5/2}}$$

$$(6) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(7) \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(8) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(9) \int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

3. 判定下列积分的敛散性

$$(1) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^3} dx$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{2 \sin x}{x \sqrt{x+1}} dx$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$(6) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x) \ln x}}$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx (0 < p, q < 1)$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx$$

$$(9) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{x^3} dx$$

$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

4. 计算下列积分

$$(1) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

5. 证明定理 3.6.11, 如果 $\Phi(y) = \int_y^{y^2} \frac{\sin xy}{x} dx$, 求 $\Phi(y)$.

6. 试证 (1) $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{t-1} dx = \Gamma(t)$; (2) $2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2t-1} dx = \Gamma(t)$.

§ 3.7 复变量函数的微积分

前面的章节中, 我们研究的函数关系是 $y = f(x)$, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, 这包括一元或多元实值函数, 即 $y, x_1, \dots, x_n$ 都是实数. 本节介绍复变量的复值函数(复映射), 它的应用是很广泛的.

3.7.1 复数与复映射

1. 复数的基本知识

形如

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ 为实数, } i = \sqrt{-1} \text{ 为虚数单位} \quad (3.7.1)$$

的“数”称为复数, $i^2 = -1$. 我们称 x 为复数 z 的实部, 记为 $x = \operatorname{Re} z$, y 为复数 z 的虚部, 记为 $y = \operatorname{Im} z$.

(1) 复数的几何表示

在平面上取直角坐标系 Oxy , 把一个复数 $z = x + iy$ 与平面上坐标为 $(x,$

y) 的点互相对应起来, 这样就使得由全体复数组成的集合(记为 $\mathbb{C}$), 与 xOy 平面对应起来. 于是, 在复数集 $\mathbb{C}$ 与平面点集 $\{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$ 之间建立了一一对应关系. 我们称坐标系的 x 轴为实轴, 而称 y 轴为虚轴, 并把 xOy 平面称为复平面, 也称为 z 平面(见图 3.7.1).

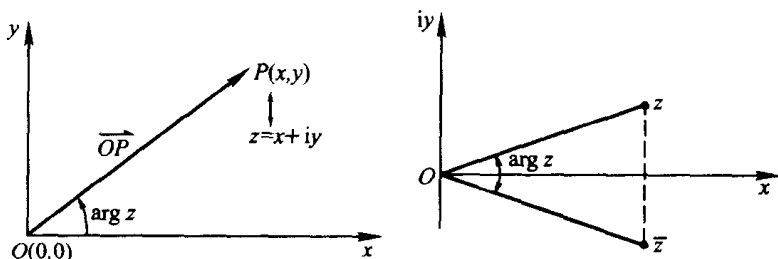


图 3.7.1

另一方面, 复数 $z = x + iy$ 还可以用向量表示. 在 xy 平面上, 将对应于复数 $z = x + iy$ 的点记为 $P(x, y)$, 于是, 从原点 O 出发的向量 $\overrightarrow{OP}$ 就可看作复数 $z = x + iy$ 所对应点的向量表示. 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 称为复数 z 的模, 记为

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{其中 } z = x + iy. \quad (3.7.2)$$

对于复数 $z \neq 0$, 实轴的正向与向量 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角称为 z 的辐角, 记为 $\text{Arg } z$. 由于向量 $\overrightarrow{OP}$ 绕原点旋转 $\pm 2k\pi$ ($k=1, 2, \dots$), 仍回到原位, 故辐角 $\text{Arg } z$ 有无穷多个值, 但是其中只有一个在区间 $(-\pi, \pi]$ 中, 我们称它为 z 的辐角的主值, 记为 $\arg z$, 显然

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, \quad -\pi < \arg z \leq \pi \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (3.7.3)$$

$$\tan \text{Arg } z = \tan(\arg z + 2k\pi) = \frac{y}{x}.$$

(2) 复数的三角表示

对于复数 $z = x + iy$, 由

$$x = \text{Re } z = |z| \cos \text{Arg } z, \quad y = \text{Im } z = |z| \sin \text{Arg } z,$$

得到复数的三角表示式(也称极坐标表示)

$$z = \text{Re } z + i \text{Im } z = |z|(\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z). \quad (3.7.4)$$

(3) 复数的共轭

我们称 $\bar{z} = x - iy$ 为复数 $z = x + iy$ 的共轭复数. 显然有如下关系

① $z = x + iy$ 与 $\bar{z} = x - iy$ 互为共轭复数, 且在复平面上关于实轴是对称的;

② $|\bar{z}| = |z|$, $\text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z$.

(4) 复数的运算

对于两个复数 $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$, 定义它们的加法与乘法如下

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \equiv (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \equiv (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

减法与除法作为加法与乘法的逆运算, 我们有

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) \equiv (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \equiv \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$$

可以证明, 复数的四则运算与实数的相应运算满足同样的规则, 如交换律、结合律、分配律等.

对于复数的乘法, 还可以用三角表示. 对于

$$z_1 = |z_1| (\cos \operatorname{Arg} z_1 + i \sin \operatorname{Arg} z_1),$$

$$z_2 = |z_2| (\cos \operatorname{Arg} z_2 + i \sin \operatorname{Arg} z_2),$$

按乘法定义得

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos (\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + i (\sin \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)].$$

从而,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \quad (3.7.5)$$

类似地可以把复数的除法用三角表示

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos (\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2) + i (\sin \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2)].$$

故

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \quad (3.7.6)$$

对于复数的幂的运算, 更有重要的公式:

若 m 为任意整数, 则

$$z^m = |z|^m (\cos m \operatorname{Arg} z + i \sin m \operatorname{Arg} z); \quad (3.7.7)$$

若 $n \geq 2$ 为任意正整数, $z^{\frac{1}{n}}$ 定义为满足 $w^n = z$ 的复数 w , 则

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{1}{n} (\arg z + 2k\pi) \right) + i \sin \left(\frac{1}{n} (\arg z + 2k\pi) \right) \right] \\ (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (3.7.8)$$

上式右边给出 $z^{\frac{1}{n}}$ 的 n 个不同的值.

例 1 求 $\sqrt[4]{1+i}$ 的所有值.

解 由于 $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, 利用公式便得到

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \left[\cos \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right],$$

其中 $k=0,1,2,3$. 因此, $\sqrt[4]{1+i}$ 共有 4 个值

$$w_0 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right);$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = iw_0;$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{16} + \frac{2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{16} + \frac{2\pi}{2} \right) \right] = -w_0;$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right) \right] = -iw_0.$$

2. 复平面上的一些集合

我们定义复平面 C 上的圆、圆周、邻域、内点、开集、闭集、区域等概念.

圆与圆周 对于给定的点 $z_0 \in C$, 分别称复平面 C 上的集合

$$B_r(z_0) = \{z \in C: |z - z_0| < r\}, r > 0,$$

$$\overline{B}_r(z_0) = \{z \in C: |z - z_0| \leq r\}, r > 0$$

与

$$S_r(z_0) = \{z \in C: |z - z_0| = r\}, r > 0$$

为以 z_0 为圆心、以 r 为半径的圆、闭圆与圆周.

邻域、内点与边界点 对于 $z_0 \in D$, 称

$$B_\eta(z_0) = \{z \in C: |z - z_0| < \eta\}, \eta > 0$$

为点 z_0 的 η 邻域(它是一个以 z_0 为圆心以 η 为半径的圆), 简称邻域.

对于集合 D 中的 z_0 , 若存在一个 η 邻域 $B_\eta(z_0)$ 全部包含在 D 内, $B_\eta(z_0) \subset D$, 则称 z_0 为 D 的内点. 如果复平面上的点 $z_0 \in C$ 的任何一个邻域中都包含集合 D 中的点, 也包含 $C \setminus D$ 中的点, 则称 z_0 为 D 的边界点.

开集与闭集 复平面 C 的子集 $E \subset C$ 称为开集, 若 E 的全部的点都是内点. 子集 $F \subset C$ 称为闭集, 若其补集 $C \setminus F$ 是开集.

区域 复平面的开子集 G 称为区域, 若 G 中的任意两点都能用 G 中有限条折线段连接起来. 以点 z_0, z_1 为端点的线段的参数式为

$$z(t) = z_0(1-t) + z_1 t \quad (t \in [0, 1]).$$

3. 复映射

现在讨论复变量的复值函数的定义.

定义 3.7.1(复映射) 在复平面 C 上给定一个区域 $D \subset C$, 如果对每一点 $z = x + iy \in D$, 按照一个给定的规则, 有复数 $w = u + iv \in W$ 与 z 相对应, 则称 w 为复变量 z 的复值函数, 简称复变函数, 或复映射, 记为 $w = f(z)$, 这里 x 、

$y, u, v \in \mathbf{R}$ 都是实数, D 称为复映射 $w = f(z)$ 的定义域.

注意到, 在上述定义中, 没有限定对应的复数 w 的值仅有一个, 但在没有新的说明之前, 我们暂时限制 $w = f(z)$ 是单值的.

先举四种复映射的例.

指数函数 $w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (z \in \mathbf{C});$

幂函数 $w = z^\alpha, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \alpha$ 为有理数;

正弦函数 $w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (z \in \mathbf{C});$

余弦函数 $w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (z \in \mathbf{C}).$

3.7.2 复映射的极限、微积分

1. 复映射的极限与连续性

(1) **极限** 设 D 为复平面 $\mathbf{C}$ 中的区域, $z_0 \in \mathbf{C}$, 复映射 $w = f(z)$ 在 z_0 的去心 η -邻域

$$B_\eta(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < \eta\}$$

内定义且为单值映射. 我们称 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时以 $A \in \mathbf{C}$ 为极限, 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $z \in B_\eta(z_0) \setminus \{z_0\}$ 时, 有

$$f(z) \in B_\varepsilon(A) = \{w \in \mathbf{C} : |w - A| < \varepsilon\},$$

记为

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} f(z) = A. \quad (3.7.9)$$

(2) **连续性** 假设复映射 $w = f(z)$ 的定义域为 $D \subset \mathbf{C}$. 如果对于 $z_0 \in D$, 极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 存在, 且有 $A = f(z_0)$, 则称 $w = f(z)$ 在 $z = z_0$ 连续.

注 ① 这里的极限与二元函数的二重极限类似, 自变量 $z = x + iy$ 中的 x, y 看作一个整体, 要同时“进入” z_0 的 δ 邻域.

② 复映射 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0(x_0, y_0)$ 的连续性等价于

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0); \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0), \quad (3.7.10)$$

也就是 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 实部 $u(x, y)$ 与虚部 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

③ 一元连续函数的三个重要的性质, 在复映射情形也有类似的结果. 设 $\overline{D} \subset \mathbf{C}$ 是复平面上的闭区域, $f(z)$ 是 $\overline{D}$ 上的连续函数, 则

- (i) $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上有界;
- (ii) $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上达到最大模;

(iii) $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上一致连续.

2. 复映射的导数

首先给出复映射导数的定义.

定义 3.7.2 (复映射的导数) 假设复映射 $w = f(z)$ 在定义域 D 内为单值的, 且对 $z_0 \in D, w_0 = f(z_0)$, 若给自变量 z_0 一增量 $\Delta z \equiv z - z_0 \neq 0$, 使得极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (3.7.11)$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 可导, 并称此极限为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记为 $f'(z_0)$, 或

$$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0}.$$

若 $f(z)$ 在 D 的每一点可导, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的解析映射; 若 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内解析, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

解析映射有重要的性质.

定理 3.7.1 (柯西-黎曼定理) 设复映射 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的定义域为 D , 则 $f(z)$ 在点 $z \in D$ 可导, 当且仅当在点 $z = x + iy$, 二元实函数 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 可微, 且 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.7.12)$$

从而, f 的实部 u 与虚部 v 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (3.7.13)$$

(3.7.13) 式中的每个方程称为拉普拉斯方程. 定理 3.7.1 可据定义证得.

定理 3.7.2 (复映射解析的充要条件) 设复映射 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的定义域为 D , 则 $f(z)$ 在 D 内解析, 当且仅当 $u(x, y), v(x, y)$ 在 D 内有一阶连续偏导数, 且满足柯西-黎曼方程. 当 $f(z)$ 在 D 中有导数时, 我们有公式

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.7.14)$$

证 我们只证明公式 (3.7.14).

由定理的前半部分知, 在 D 内 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 有一阶连续偏导数. 取定一点 $z_0 \in D$, 并由柯西-黎曼方程得

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \equiv \alpha \\ v_x(x_0, y_0) &= -u_y(x_0, y_0) \equiv \beta. \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

据二元函数 $u(x, y), v(x, y)$ 可微的定义, 有

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + o(\rho), \quad (3.7.16)$$

其中 $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta z|$. 将 (3.7.15) 代入 (3.7.16), 得

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + \epsilon_1(|\Delta z|), \quad (3.7.17)$$

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) + \epsilon_2(|\Delta z|), \quad (3.7.18)$$

且

$$\lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{\epsilon_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0; \quad \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{\epsilon_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0.$$

作“(3.7.17) + i(3.7.18)”, 得到

$$f(z) - f(z_0) = (\alpha + i\beta)(z - z_0) + \epsilon_1(|\Delta z|) + i\epsilon_2(|\Delta z|),$$

故

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (\alpha + i\beta) = \frac{\epsilon_1(|\Delta z|) + i\epsilon_2(|\Delta z|)}{\Delta z},$$

令 $\Delta z \rightarrow 0$, 便得所需证明的公式 (3.7.14).

本节中的其他定理, 我们省略其证明, 有兴趣的读者可以阅读有关参考书.

例 2 试证 $f(z) = e^z$ 在全复平面上解析, 且 $(e^z)' = e^z$.

解 由 $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ 得

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

于是, 可验证公式 (3.7.9), 对每个 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

从而 $f(z) = e^z$ 在全复平面上解析. 再由公式 (3.7.11) 得

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

这就是所要证明的.

定义 3.7.3 (光滑曲线、简单曲线) 设

$$z = z(t) = \operatorname{Re} z(t) + i \operatorname{Im} z(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

这里 $\operatorname{Re} z(t)$ 与 $\operatorname{Im} z(t)$ 都是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数、有连续导数, 并且 $z'(t) \neq 0$. 则当 t 取遍 $[a, b]$ 时, 相应的 $z(t)$ 所组成的集合称为复平面 $\mathbb{C}$ 上的一条光滑曲线. 光滑曲线或分段光滑曲线 (有限条光滑曲线相连接) 又无重点者, 称为简单曲线.

3. 复平面上的初等函数

我们来定义复变数的复值初等函数. 设复变数 $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(1) 指数函数 定义 $w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$,

称为指数函数. 指数函数具有如下性质:

① 对于任何复数 $z = x + iy \in \mathbb{C}$, 都有 $e^z \neq 0$.

② 当 z 为实数 x 时, $w = e^x$; 当 z 为纯虚数 iy 时, 有

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad (3.7.19)$$

这就是著名的欧拉公式. 还能得到复数 z 的指数表达式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad (3.7.20)$$

其中 r 是 z 的模, θ 是其辐角.

③ 对任何复数 z_1, z_2 , 有

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

④ $w = e^z$ 在整个复平面上解析, 并且

$$\frac{dw}{dz} = \frac{de^z}{dz} = e^z.$$

⑤ $w = e^z$ 具有周期性, 且以 $2\pi i$ 为周期.

(2) 对数函数, 支点 已给复数 $z \neq 0$, 我们称满足 $z = e^w$ 的复数 w 为 z 的对数, 记为 $w = \text{Ln } z$.

令 $w = u + iv$, 则 $z = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$, 由公式 (3.7.20)

$$e^u = |z|, \quad e^{iv} = \cos v + i \sin v,$$

从而有

$$u = \ln |z|, \quad v = \text{Arg } z,$$

也就是

$$w = \text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z. \quad (3.7.21)$$

把 $z \neq 0$ 作为复变数, 即 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则 (3.7.21) 就是 z 的对数函数, 它是指数函数 $z = e^w$ 的反函数 (复函数的反函数与实函数情况一样定义).

由于 $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 所以复变数对数函数 $w = \text{Ln } z$ 是无穷多值函数. 记 $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, 称其为 $\text{Ln } z$ 的主值, 我们有

$$w = \text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i,$$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

对数函数的积与商有公式

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2,$$

$$\text{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2.$$

我们看到, $\text{Ln } z$ 是无穷多值函数, 这似乎不符合“函数”的定义, 因为对于一

个给定的复变数 z , 应当有“一个确定的值”与之对应, 这“无穷多值”, 到底取哪一个? 然而, 在定义对数函数时, 确实有无穷多个 w 值满足 $z = e^w$, 它们是由 (3.7.21) 给出的那些 w 值. 如何解决这个问题呢?

大数学家黎曼用所谓“黎曼曲面”的办法解决了上述问题, 但是要用到更多的数学理论, 我们不详细介绍, 有兴趣的读者可参考复变函数教程. 这里只作简单的讨论.

限制非零复变数 $z \neq 0$ 的辐角在 $(-\pi, \pi]$ 内, 于是 z 的辐角 $\text{Arg } z$ 的主值 $\arg z$ 满足

$$-\pi < \arg z \leq \pi,$$

这是复平面上去掉负实轴与零点而得到的区域 D , 此时我们称包括零点的负实轴为“割线”, 称 0 与 ∞ 为“支点”. 在用割线割开的复平面中的区域 D_0 内, $\text{Arg } z$ 的主值 $\arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$ 是一个单值函数. 我们称

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$

为 $w = \text{Ln } z$ 的一个单值分支, 它是用割线割开了的复平面区域 D 内的单值连续函数.

当 $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 给定 $k = k_0$ 后, 易见,

$$\ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2k_0\pi), \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$

也是区域 $D_k = \{z \in \mathbb{C} : -\pi + 2k_0\pi < \text{Arg } z \leq \pi + 2k_0\pi\}$ 内的单值连续函数, 称为 $w = \text{Ln } z$ 的 k_0 分支. 这时, 我们把负实轴看作由“上沿”与“下沿”组成, 而 $w = \text{Ln } z$ 的 k_0 分支在负实轴上(除去 0)也有定义, 只是同一个单值连续分支在“上沿”与“下沿”的取值不同.

利用导数定义可以证明, 若 $f(z)$ 是 $w = \text{Ln } z$ 的 k_0 分支, 则 $f(z)$ 在 D_0 内解析, 并且有

$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

因此我们也称 $w = \text{Ln } z$ 的 k_0 分支为函数 w 的一个解析分支.

(3) 幂函数 设 α 是给定的实数或复数, 对于复变数 $z \neq 0$, 定义 z 的 α 次幂函数为

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln } z};$$

在 α 为正实数的情形, 对于 $z = 0$ 时, 我们定义 $z^\alpha = 0$.

幂函数的取值与 α, z 大有关系. 事实上, 由

$$\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i, \quad -\pi < \arg z \leq \pi, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad \ln 1 = 0,$$

得 $z^\alpha = e^{\alpha \ln z + \alpha \cdot 2k\pi i}$. 可见对同一个 $z \neq 0$, 幂函数 $w = z^\alpha$ 的取值不是惟一的, 其不同取值的个数等于不同数值的因子

$$e^{\alpha \cdot 2k\pi i}, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

的个数. 于是, 我们有

① 若 $\alpha = \frac{m}{n}$ 是既约有理数, 其中 m, n 为整数, 且 $n \geq 1$, 则 z^α 是 n 值的; 特别地, 当 α 为整数时, z^α 是单值的.

例如, 当 $n > 1$ 为整数时, $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$ 称为根式函数, 它是 $z = w^n$ 的反函数, 对于 $z \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} w = \sqrt[n]{z} &= e^{\frac{1}{n} \ln z} \cdot e^{\frac{1}{n} 2k\pi i} = e^{\frac{1}{n} (\ln |z| + i \arg z)} \cdot e^{\frac{1}{n} 2k\pi i} \\ &= \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{1}{n} (\arg z + 2k\pi)}, \\ &\quad -\pi < \arg z \leq \pi, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \end{aligned}$$

这函数是 n 值的, 在复平面上以负实轴 (包括 0) 为割线所得的区域 D 内, 它有 n 个不同的解析分支: 对于 $k = 1, 2, \dots, n$,

$$w = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{1}{n} (\arg z + 2k\pi)}, \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

又当 α 为既约有理数 $\alpha = \frac{m}{n}$, $n \geq 2$ 时,

$$w = z^\alpha = z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n} (\ln z + 2k\pi i)}.$$

② 若 α 是无理数, 则 z^α 是无穷多值的.

从指数函数的性质可以得到幂函数的性质, 例如关于可导性: 对于 $\ln z$ 的每一个解析分支, 相应地也有 z^α 的一个解析分支, 并且有

$$(z^\alpha)' = \alpha \cdot \frac{z^\alpha}{z}, \quad z \neq 0.$$

(4) 三角函数 对于复变数 $z \in \mathbb{C}$, 定义

$$\text{正弦函数: } w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2};$$

$$\text{余弦函数: } w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

$$\text{正切函数: } \tan z = \frac{\sin z}{\cos z};$$

$$\text{余切函数: } \cot z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\text{正割函数: } \sec z = \frac{1}{\cos z};$$

$$\text{余割函数: } \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

复变三角函数与实变三角函数有许多类似之处, 但也有所不同, 列出来请读者自行比较.

① $\cos z$ 是偶函数, $\sin z$ 是奇函数;

② $\cos z$ 与 $\sin z$ 都是 2π 周期函数;

③ 和角公式

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$

④ 平方和公式

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

⑤ 绝对值不等式

$$|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1 \text{ 一般不成立.}$$

⑥ 解析性

$\sin z$ 与 $\cos z$ 在复平面 C 上解析, 且

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z; \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z.$$

其他性质我们不再介绍了.

(5) 反三角函数 对于复变数 $z \in C$, 我们也利用指数函数与对数函数来定义反三角函数. 例如反正切函数是正切函数 $z = \tan w$ 的反函数 $w = \operatorname{Arctan} z$, 由于

$$z = \tan w = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}},$$

令 $e^{2iw} = \tau$, 就得到

$$z = \frac{1}{i} \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \quad \text{与} \quad \tau = \frac{-z + i}{z + i},$$

故反正切函数 $w = \operatorname{Arctan} z$ 定义为

$$\begin{aligned} w = \operatorname{Arctan} z &= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{-z + i}{z + i} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{-(z - i)}{z + i} \\ &= \frac{1}{2i} [\operatorname{Ln}(z - i) - \operatorname{Ln}(z + i) + i\pi]. \end{aligned}$$

取定 $\operatorname{Ln}(z - i)$ 与 $\operatorname{Ln}(z + i)$ 在某个点 $z \neq \pm i$ 的值 $\ln(z - i)$ 与 $\ln(z + i)$, 则 w 相应的值为

$$w = \arctan z = \frac{1}{2i} [\ln(z - i) - \ln(z + i) + i\pi],$$

我们有

$$\operatorname{Arctan} z = \arctan z + k\pi, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

反正切函数 $w = \operatorname{Arctan} z$ 是无穷多值函数, 在其每个单值分支是解析的, 并且在每个解析分支内, 有导数

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz} \operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right\} = \frac{1}{1 + z^2}.$$

关于反三角函数, 如 $w = \operatorname{Arcsin} z, \operatorname{Arccos} z$ 等, 因为比较复杂, 已超出本教

程范围,这里不再讨论.

4. 复映射的积分

设 $z = z(t)$ 是复平面 C 上以 z_0 与 z 为端点的光滑曲线 l , 复映射

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

是 l 上的连续函数.

把 l 用分点 $z_0, z_1, \dots, z_n = z$ 分成 n 段小弧 $\widehat{z_k z_{k+1}}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

任取一点 $\zeta_k \in \widehat{z_k z_{k+1}}$, 作和

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k),$$

记 $\zeta_k = (\xi_k, \eta_k) = \xi_k + i\eta_k$, $z_k = (x_k, y_k) = x_k + iy_k$, 则和式化为

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{n-1} [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)][(x_{k+1} - x_k) + i(y_{k+1} - y_k)] \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n-1} u(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k) \right] + \\ &\quad i \left[\sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} u(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k) \right]. \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

定义 3.7.4 (复积分) 假设复映射 $w = f(z)$ 在复平面 C 的以 z_0 与 z 为端点的光滑曲线 $l: z = z(t)$ 上连续, 如上作 l 的分点 $z_0, z_1, \dots, z_n = z$ (图 3.7.2), 在每个小弧段 $\widehat{z_k z_{k+1}}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 上任取一点 $\zeta_k \in \widehat{z_k z_{k+1}}$, 作和如式 (3.7.22), 令

$$|z_{k+1} - z_k| = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1);$$

与

$$\lambda = \max \{ |\Delta z_k| = |z_{k+1} - z_k| : k = 1, 2, \dots, n-1 \}.$$

若当 $\lambda \rightarrow 0$ 时和式 (3.7.22) 的极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J$ 存在且有限, 则此极限就是

$$\int_l u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_l v(x, y)dx + u(x, y)dy,$$

我们称它为 $f(z)$ 沿曲线 l 的复积分, 记为

$$\int_l f(z)dz = \int_l u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_l v(x, y)dx + u(x, y)dy. \quad (3.7.23)$$

当 l 由光滑参数式 $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$), 给出时, 复积分成为

$$\int_l f(z)dz = \int_{t_0}^T [u(\varphi, \psi) + iv(\varphi, \psi)][\varphi' + i\psi']dt. \quad (3.7.24)$$

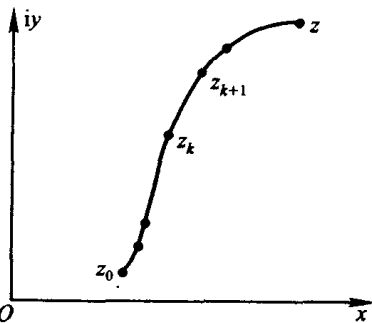


图 3.7.2

据复积分的定义,立即可推得它的一些类似于实积分的性质.

定理 3.7.3(复积分的性质) 设复映射 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在简单光滑曲线 l 上连续,则它们在 l 上的复积分存在,且

$$(i) \quad \int_l [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_l f(z) dz + \beta \int_l g(z) dz; \quad (\text{线性性})$$

$$(ii) \quad \int_{l_1 \cup l_2 \cup \dots \cup l_n} f(z) dz \\ = \int_{l_1} f(z) dz + \int_{l_2} f(z) dz + \dots + \int_{l_n} f(z) dz, \quad (\text{区域可加性})$$

其中 $l_1, l_2, \dots, l_n$ 为互不相交或相互连接的光滑曲线;

$$(iii) \quad \int_{l^-} f(z) dz = - \int_{l^+} f(z) dz; \quad (\text{反向变号性})$$

$$(iv) \quad \left| \int_l f(z) dz \right| \leq ML, \quad (\text{有界性})$$

这里 $f(z)$ 在 l 上满足 $|f(z)| \leq M$, L 是曲线 l 的长度.

例 3 设 l 是连接复平面上 z_0 与 z 两点的简单曲线,则

$$\int_l dz = z - z_0; \\ \int_l z dz = \frac{1}{2} z^2 - z_0^2.$$

若 l 是闭曲线,则上述两积分都为 0.

例 4 设 l 是复平面上圆周 $|z - \alpha| = \rho$, 其中 $\alpha \in \mathbb{C}$, ρ 为正数,且圆周 $|z - \alpha| = \rho$ 的正向取作逆时针方向,求证积分

$$\int_l \frac{1}{z - \alpha} dz = 2\pi i. \quad (3.7.25)$$

证 令 $z - \alpha = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 于是 $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$, 从而

$$\int_l \frac{1}{z - \alpha} dz = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i.$$

这就是要证明的.

式(3.7.25)是一个有重要应用的公式.

5. 复积分的柯西定理

现给出有关复积分的几个重要定理.

定理 3.7.4(柯西定理) 设 l 为 $\mathbb{C}$ 中的简单闭曲线 $z = x(t) + iy(t)$, 函数 $f(z)$ 在以 l 为边界的有界闭区域 D 上解析, 则

$$\int_{l^+} f(z) dz = 0, \quad (3.7.26)$$

这里积分是沿曲线 l 的正方向取的.

证 由格林公式与柯西-黎曼公式,得到

$$\int_l f(z)dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

推论 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析,则

(i) 对于两个点 $z, z_0 \in \mathbb{C}$, 设 l 是 D 内连接此两点的任一条简单曲线,则

$$\int_l f(z)dz$$

的值不依赖于曲线 l , 故可将积分记为

$$\int_l f(z)dz = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta.$$

(ii) 固定 $z_0 \in D$, 对任一点 $z \in D$, 令

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$$

是由变动上限的积分 $\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$ 定义的函数, 则 $F(z)$ 在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

这可以视为是复变函数中的“牛顿-莱布尼茨公式”.

定理 3.7.5 (柯西公式) 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是以有限条简单闭曲线 l 为边界的有界区域, 设 $f(z)$ 在闭区域 $\bar{D} = D \cup l$ 中解析, 则对于每个 $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.7.27)$$

证 注意到, 当 $z \in D$ 给定后, $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, 以 $\zeta \in \bar{D}$ 为自变量, 且除了 $\zeta = z$ 一点外, 它都解析. 用一个半径为 ρ 的小圆周 $l_0: |\zeta - z| = \rho$ 把点 z “挖去” (见图 3.7.3), 则在以 $l \cup l_0$ 为边界的区域 D_1 中, $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 解析.

由定理 3.7.4, 得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{l \cup l_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{l_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{l_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \end{aligned}$$

故

$$\int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{l_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

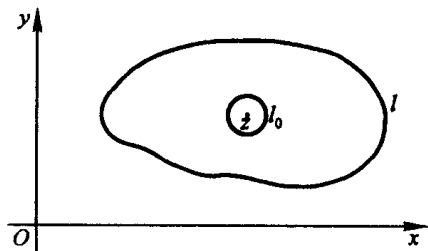


图 3.7.3

对上式左边先利用中值定理,再据例3中计算的积分代入,令 $\rho \rightarrow 0$,便立即得到公式(3.7.27).

推论 若 $f(z)$ 在区域 D 内解析,则 $f(z)$ 在 D 内有任意阶导数

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.7.28)$$

这个推论揭示了复变数解析函数的一个重要性质: $f(z)$ 在 D 内解析,蕴含它有任意阶导数.

复变函数的理论中,复级数(泰勒级数、罗朗级数)将在第四章中介绍.其余的,如留数理论、保形映射等,将在以后的“数学物理方法”中遇到一部分,而在流体力学、电学及偏微分方程理论中也将得到应用.包括留数理论、傅里叶分析、复位势等,将在后行课“数学物理方法”中讲授,而它在流体力学、等势线、电场以及偏微分方程等方面的应用,也将在今后的课程与科研活动中遇到.

习 题

1. 求 $\sin i, \cos(2+i), 2', \operatorname{Ln} 2, \ln(1+i), (-1)^{2i}$ 的值.

2. 若 x, y 为实数,求证

$$\left(iy + \frac{1}{ix}\right)^2 - \left(ix + \frac{1}{iy}\right)^2 = (x^2 - y^2) \left(\frac{1}{xy} - 1\right)^2.$$

3. 试证:

$$(1) (1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n = 2^n \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right), n \in \mathbb{N};$$

$$(2) \left(\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} \right)^n = \frac{1 + i \tan^n \theta}{1 - i \tan^n \theta}, \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

4. 试问:函数 $f_1(z) = \frac{1}{1-z}, f_2(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 在 $|z| < 1$ 内是否连续? 是否一致连续?

5. 求证函数 $f(z) = |z|^2$ 除 $z=0$ 外处处不可导.

6. 求 ① $(\cos z)'$, ② $(\operatorname{Ln} z)'$,

$$\textcircled{3} (z^\alpha)' , \alpha \neq 0.$$

7. 函数 $\overline{z}^2, e^{\overline{z}}, \sin \overline{z}, \cos \overline{z}$ 是否解析? 为什么?

8. 设 $f(z) = \frac{2z}{1-z}$, 求 $f'(0), f'(i)$.

9. 证明:在极坐标之下,复变量 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 函数 $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$, 则 Cauchy-Riemann 方程化为

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta;$$

且

$$f'(z) = \frac{r}{z} (u_r + i v_r).$$

10. 计算积分 $I = \int_{\Gamma} |z| dz$ 沿以下路径的值:

(1) 直线段; (2) 单位圆的左半圆; (3) 单位圆的右半圆.

11. 计算积分 $I = \int_L \operatorname{Re} z dz$ 沿以下路径的值:

(1) 单位圆(按反时针方向从 1 到 1);

(2) 从 z_1 沿直线到 z_2 .

12. 计算积分 $I = \int_{|z|=1} |z+1| |dz|$.

13. 计算积分 $I = \int_{z=-1}^z \frac{z}{(2z+1)(z-2)} dz$.

14. 若 n 为自然数, 试证明:

$$\int_0^{2\pi} e^{r \cos \varphi} \cos(r \sin \varphi - n\varphi) d\varphi = \frac{2\pi}{n!} r^n,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{r \sin \varphi} \cos(r \sin \varphi - n\varphi) d\varphi = 0.$$

§ 3.8 勒贝格积分

前面所介绍函数的黎曼积分 $\int_a^b f(x) dx$, 是从求曲边梯形面积出发的, 而黎曼积分的主要对象是连续函数, 或分段连续函数. 但在科学技术领域中所需处理的函数, 不满足这条件的却很多, 黎曼积分的概念已远远不够了. 例如, 在物理学中, 保持能量守恒定律的函数就不一定是连续的, 为此, 数学家们必须给出保持能量守恒的函数类的数学刻画. 20 世纪初, 法国数学家勒贝格(H. L. Lebesgue) 从集合论的观点出发提出了新的积分概念, 经过许多数学家的努力, 逐步完善, 终于成为目前有着广泛应用的勒贝格积分(简称 L -积分).

3.8.1 勒贝格积分的定义, 黎曼积分的推广

可以从几种角度定义勒贝格积分, 我们采用从简单函数到非负可测函数、任意可测函数的方法来定义.

定义 3.8.1(勒贝格积分) 设 E 是包含在 $\mathbf{R}$ 中的一个集合, $E \subset \mathbf{R}$, $f(x)$ 是定义在 E 上的实值函数.

若 $f(x)$ 是 E 上的简单函数(见图 3.8.1), 也就是

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{e_k}(x), \quad (3.8.1)$$

其中 E 的子集 $e_k = \{x \in E: f(x) = c_k\}$ 是使 $f(x)$ 取值为常数值 c_k 的点 x 的全体, 而

$$\chi_{e_k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in e_k, \\ 0, & \text{当 } x \notin e_k, \end{cases}$$

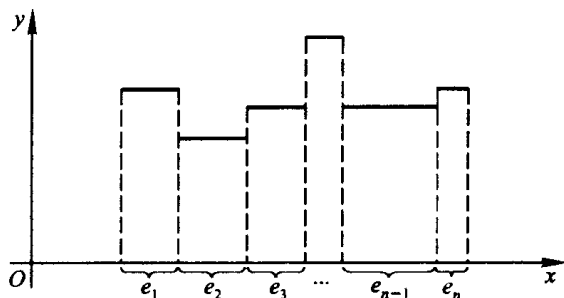


图 3.8.1

称为 e_k 的特征函数. 我们定义 $f(x)$ 在 E 上的 L -积分 (Lebesgue 积分) 为

$$\int_E f(x) dm = \sum_{k=1}^n c_k m e_k. \quad (3.8.2)$$

注 1 在上面的定义中, 看到二个陌生的记号: $m e_k$ 与 dm , 前者是集合 e_k 的勒贝格测度, 后者是相当于黎曼积分中积分微元 dx 的勒贝格积分微元 dm , 我们编排在下面的注释 2(a) 中对它们加以说明.

(i) 若 $f(x) \geq 0$ 是 E 上的非负函数, 取所有满足 $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ 的、 E 上的简单函数 $\varphi(x)$ 的全体, 我们定义 $f(x)$ 在 E 上的 L -积分为

$$\int_E f(x) dm = \sup \left\{ \int_E \varphi(x) dm : 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \right\}. \quad (3.8.3)$$

当上式右边是有限数时, 称 $f(x)$ 在 E 上是 L -可积的, 并称 $\int_E f(x) dm$ 为其 L -积分; 如果右边是 $+\infty$, 则 $f(x)$ 在 E 不可积, 但称其 L -积分等于 $+\infty$.

(ii) 若 $f(x)$ 是 E 上的实值函数, 把 $f(x)$ 分解为正部与负部

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad (3.8.4)$$

其中

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ 0, & f(x) < 0; \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0, \end{cases}$$

并定义 $f(x)$ 在 E 上的 L -积分为

$$\int_E f(x) dm = \int_E f_+(x) dm - \int_E f_-(x) dm. \quad (3.8.5)$$

同样地, 上式右边是有限数时, 我们称 $f(x)$ 在 E 是 L -可积的, 并称该有限数为其 L -积分; 如果右边是 $+\infty$, 或 $-\infty$, 或 $\infty - \infty$, 则 $f(x)$ 在 E 不可积, 前两种情形称其 L -积分等于 $+\infty$ 或 $-\infty$, 第三种情形称其不存在 L -积分.

注 2 由定义 3.8.1 可见, 勒贝格积分的定义并不复杂, 其要点在于“勒贝格测度”与“勒贝格可测函数”, 这有清晰的数学思路、严格的数学定义和周密的数学证明 (可参看实变函数教程). 作为从事非专业数学研究的读者, 只需清楚下

述几点:

(i) 勒贝格测度(L -测度)是通常欧氏空间的“长度”、“面积”、“体积”等度量的推广. 对于许多图形与集合, 我们通常所用的若尔当(Jordan)测度(J -测度)概念已不适用.

J -测度和 L -测度的主要差别是, 前者只有有限可加性, 比较适合测量直线上的区间、平面上的矩形或一些规则图形、空间中的立方体等; 而后者有可列可加性, 对于很大一类的集合, 都可以用 L -测度来度量.

有限可加性: 当集合 A_1 与 A_2 互不相交时, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 测度 μ 满足

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

可列可加性: 当 A_j 两两互不相交时, $A_j \cap A_k = \emptyset, j \neq k$, 测度 μ 满足

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

在 L -测度意义下可测的集合称为 L -可测集. 如此, me_k 是集合 e_k 的 L -测度, 而 dm 正是这种测度意义下的积分微元.

例如对于集合

$$Q = \{x \in [0, 1]: x \text{ 为 } [0, 1] \text{ 中的有理点}\}$$

$$P = \{x \in [0, 1]: x \text{ 为 } [0, 1] \text{ 中的无理点}\},$$

在引进 L -测度后, Q 与 P 都是可测的集合. 对于 $\mathbf{R}$ 上的集合, 凡是开集、闭集以及它们的可列并与可列交所成的集合都是 L -可测集.

(ii) 勒贝格可测函数(L -可测函数) $f(x)$, 是指集合

$$\{x \in E: f(x) > \alpha\}$$

对任何 $\alpha \in \mathbf{R}$ 都是 L -可测集. 例如狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \text{ 为有理点,} \\ 0, & x \in [0, 1] \text{ 为无理点,} \end{cases}$$

就是 L -可测函数.

定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数、单调函数等常出现在自然科学领域中的函数, 大都是 L -可测的.

(iii) 上述 L -可测集、 L -可测函数、 L -可积函数等概念是对 $\mathbf{R}$ 中的有界集合 E 引进的. 但是, 它们都可以推广到无界集合上, 甚至到更广泛的抽象集合上, 从而形成了在近代数学领域中起重要作用的《抽象测度和抽象积分理论》.

定义 3.8.2 (L 可积与 L^2 可积) 称集合 E 上 L -可积函数的全体为 L -可积函数类, 记为

$$L(E) \equiv L^1(E) = \left\{ f: \int_E |f(x)| dm < +\infty \right\}. \quad (3.8.6)$$

进而, 称 E 上函数 f 为 L -平方可积(或记为 L^2 可积)的, 如果该函数的平方是 L -

可积的,称 L -平方可积函数的全体为 L -平方可积函数类,记为

$$L^2(E) = \left\{ f: \int_E |f(x)|^2 dm < +\infty \right\}. \quad (3.8.7)$$

在函数类 $L(E)$ 中,对于 $f, g, h, \dots \in L(E)$, 定义“加法”、“数乘”、“距离”:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x),$$

$$\rho(f, g) = \int_E |f(x) - g(x)| dm,$$

$$\rho(f, g) = \left\{ \int_E |f(x) - g(x)|^2 dm \right\}^{\frac{1}{2}},$$

则 $L(E)$ 与 $L^2(E)$ 成为线性空间,同时也是距离空间.这里线性空间、距离空间都是通常的欧氏空间的推广,在第六章中我们还要进一步介绍.

对于定义在无界集 $E \subset \mathbf{R}$ 上的可测函数 $f(x)$, 我们取一系列单调递增的区间 $[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \dots \subset [a_n, b_n] \subset \dots$, 使得 $\bigcup_{n=1}^{(\infty)} [a_n, b_n] \subset \mathbf{R}$. 如果极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a_n, b_n]} |f(x)| dm$$

存在并且有限(极限值不依赖于 $[a_n, b_n]$ 的选取), 则称 $f(x)$ 在无界集 E 上 L -可积. 若 $E = \mathbf{R}$, 常记 $\mathbf{R}$ 上的 L -积分为

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) dm = \int_{(-\infty, +\infty)} f(x) dm.$$

$L(E)$ 、 $L^2(E)$ 对无界集合类似定义.

3.8.2 勒贝格积分的重要性质

勒贝格积分之所以有重要的理论价值和广泛的实际应用,就在于它有许多重要性质.

(1) L -积分的线性性 若 $f, g \in L(E)$, 且 α, β 为任意实数, 则

$$\int_E |\alpha f(x) + \beta g(x)| dm = \alpha \int_E f(x) dm + \beta \int_E g(x) dm.$$

(2) L -积分的 σ 可加性 设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 是有界可测集 E 的两两互不相交的可测子集, 且 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 且 $f(x) \in L(E)$, 则

$$\int_E f(x) dm = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f(x) dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x) dm.$$

(3) L -积分的绝对连续性 设 E 是有界可测集, $f \in L(E)$, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得满足 $me < \delta$ 的可测子集 $e \subset E$ 都成立

$$\left| \int_e f(x) dm \right| < \epsilon.$$

(4) L -积分的绝对可积性 设 E 是有界可测集, 且 $f \in L(E)$, 则 $|f| \in L(E)$, 并成立

$$\left| \int_E f(x) dm \right| \leq \int_E |f(x)| dm.$$

(5) L -积分的惟一性 设 E 是有界可测集, $f \in L(E)$, 则

$$\int_E |f(x)| dm = 0,$$

当且仅当 $f(x) = 0$ 在 E 上几乎处处成立. “几乎处处”成立是指除去一个零测度子集 $e \subset E$, $me = 0$, $f(x) = 0$ 在 $E \setminus e$ 上处处成立. 记为

$$f(x) = 0, \quad a.e.$$

(6) L -可积函数用简单函数逼近 设 E 是有界可测集, $f \in L(E)$, 且 $f \geq 0$, 则存在 E 上的单调增的简单函数序列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 亦即每个 $\varphi_n(x)$ 都是形如(3.8.1)的函数, 且

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq \varphi_n(x) \leq \cdots,$$

使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x), \quad x \in E,$$

并且

$$\int_E f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n(x) dm.$$

(7) L -积分的单调收敛定理 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调增的正函数序列, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) dm = \int_{\mathbf{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dm = \int_{\mathbf{R}} f(x) dm.$$

(8) L -积分的控制收敛定理 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(\mathbf{R})$. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

且存在 $g \in L(\mathbf{R})$, 对一切 n , 都有 $|f_n(x)| \leq g(x)$, 则 $f \in L(\mathbf{R})$, 并有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) dm = \int_{\mathbf{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dm = \int_{\mathbf{R}} f(x) dm.$$

(9) L -积分的富比尼(Fubini)定理 设 $f(x, y) \in L(\mathbf{R}^2)$, 则

$$\int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dm_x \right\} dm_y = \int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dm_y \right\} dm_x.$$

上述性质是 L -函数的基本性质, 它们体现了 L -积分的优点. 在学习 R -积分时, 读者看到, 积分与极限、积分与积分的次序是要在较强的条件下才能交

换,但在 L -积分时,交换它们次序的条件却大大减弱了,这是由于 L -积分是在集合论的观点和集合的工具下引进和处理的.在第四章中引进级数概念之后,人们会看到,在应用时, L -积分会体现出更多的优越性.

注 上述性质虽然是对有界集合 E 叙述的,但除个别例外,对无界集合 E 也都成立.

3.8.3 黎曼积分与勒贝格积分的比较

我们就一维情形讨论.设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数,取集合 $E = [a, b]$, $f(x)$ 的黎曼积分 $\int_a^b f(x) dx$ 与勒贝格积分 $\int_E f(x) dm$ 之间的异同很多,我们仅就以下三个方面进行比较.

(1) **积分对象**:在有限区间上, L -积分比 R -积分广

定理 3.8.1 (R -可积必定 L -可积) 在有限区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 是 R -可积的,则必是 L -可积的,且积分值相等

$$\int_a^b f(x) dx = \int_E f(x) dm. \quad (3.8.8)$$

R -可积的范围可以扩大到在 $[a, b]$ 上有有限个第一类间断点的连续函数的情形,但却有如下例子.

例 1 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \text{ 为有理点,} \\ 0, & x \in [0, 1] \text{ 为无理点,} \end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 上不是 R -可积的,因为在 $[0, 1]$ 上,它的达布大和 $S=1$,而达布小和 $s=0$.但是,它是 L -可积的,因为 $[0, 1]$ 中有理点集合 Q 的勒贝格测度 $mQ=0$,因此其 L -积分为

$$\int_{[0,1]} D(x) dm = \int_Q D(x) dm + \int_{[0,1]/Q} D(x) dm = \int_Q 1 dm + \int_{[0,1] \setminus Q} 0 dm = 0.$$

事实上,我们有更深刻的定理

定理 3.8.2 (R -可积的充要条件) 有限区间 $[a, b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 为 R -可积的充要条件是: $f(x)$ 的不连续点集为 0 测度集合.

但是必须指出,定理 3.8.2 对 $[a, b]$ 上的无界函数不成立.只要研究例子

例 2 函数

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

在 $[0, 1]$ 上按照广义积分意义是 R -可积的,但不是 L -可积的,因 $|f(x)|$ 非绝对可积(见 L -积分性质 4).

(2) **交换极限与积分次序**: L -积分比 R -积分要求低

从一些极限过程交换次序的要求条件来看, L -积分较 R -积分优越. 例如, 假设一函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 极限过程

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (3.8.9)$$

与积分过程

$$\int_a^b f_n(x) dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

是否能交换次序? 也就是

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

是否成立?

R -积分所要求的条件是: (3.8.9) 式关于 $x \in [a, b]$ 一致成立 (参看定理 3.6.5、定理 3.6.6). 类似地, 关于连续性、可积性等, R -积分都有过多的限制与较高的要求. 然而, 对于 L -积分来说, 要求就宽得多 (见勒贝格单调收敛定理与控制收敛定理等). 现举一个例子来说明.

例 3 将狄利克雷函数 $D(x)$ (见例 1) 写成下述函数序列

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2, \dots, r_n \text{ 为有理点,} \\ 0, & x \in [0, 1] \text{ 为无理点,} \end{cases}$$

的极限函数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = D(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

这里 $0 \leq \psi_n(x) \leq D(x)$, 因此在 L -积分意义下有

$$\int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \psi_n(x) dm = \int_{[0,1]} D(x) dm = 0.$$

但是, $D(x)$ 不是 R -可积的, 尽管 R -积分

$$\int_0^1 \psi_n(x) dx = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

(3) L -积分的求和换序:

定理 3.8.3 (L -积分的求和换序) 设 $f(x)$ 与 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是可测集 E 上

的非负可测函数, 且 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x)$, 则

$$\int_E f(x) dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_E f_k(x) dm.$$

显然, 这比黎曼积分情形的条件要放宽得多.

(4) 交换求导与积分次序: L -积分比 R -积分要求低
 R -积分的牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = f(b) - f(a)$$

要求 $f'(x)$ 连续, 至少也要求 $f'(x)$ 是 R -可积的. 但是, L -积分情形下, 可以引进一种称为“绝对连续函数”的概念(这里不再介绍), 使得牛顿-莱布尼兹公式成立.

3.8.4 勒贝格平方可积空间

勒贝格平方可积空间 $L^2(\mathbf{R}^n)$

$$L^2(\mathbf{R}^n) = \left\{ f: \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 dm < +\infty \right\}$$

中的函数, 具有一个非常重要的性质, 那就是能量守恒. 能量守恒是宇宙间的一个重要定律, 物质无论怎样变化, 都必须服从能量守恒定律, 无一例外. 这么重要的自然规律, 在数学上是如何表示的呢? 这需要在第 5 章中讲过傅里叶变换后才会清楚, 但这里我们要强调, 宇宙间任何函数 $f(x)$, 如果它代表的是一种能量守恒物质的变化, 则 $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$; 反之, $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中的任意函数 $f(x)$ 所代表的物质变化都是能量守恒的, 此即帕塞瓦尔(Parseval)公式, 在一维情形是:

设 $f \in L^2(\mathbf{R})$, 则

$$\int_{\mathbf{R}} |f|^2 dm = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |f^\wedge|^2 dm,$$

其中 $f^\wedge$ 是 f 的傅里叶变换, 这个公式就是能量守恒定律的数学表示, 而空间 $L^2(\mathbf{R})$ 是能量守恒信号所成的集合.

L -积分比 R -积分要广泛些, 使用起来比较方便灵活, 对问题的观察也较为深刻. 可以说, 与 R -积分比较起来, L -积分是向前迈进了一大步.

习 题

1. 设 A, B, C 为某空间 X 中的任意三个集合, 试证以下两个等式

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C); \quad (A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$$

2. 设集合族 $A_\alpha \subset Z; \alpha \in \Delta$, 试证如下公式

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \Delta} (X \setminus A_\alpha); \quad X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Delta} (X \setminus A_\alpha).$$

3. 若集合 (1) $A \subset B$, (2) $A = B$, 在两种情况下, 它们的特征函数 $\chi_A(x)$ 与 $\chi_B(x)$ 应当有何关系? 请写出具体的表达式.

4. 试问: 函数 $f(x) = \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x}$ 在 $[0, 1]$ 上的 R -积分与 L -积分的存在否? 它们的关系又如何?

5. 求如下极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1 + \frac{x}{n^2}} \sin^5 nx dx.$$

附录

Fourier 变换表

表 1 Fourier 变换

$f(x)$	$f^\wedge(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iuv} du$
运算规则	
$\alpha f(x) + \beta g(x) (\alpha, \beta \in \mathbf{C})$	$\alpha f^\wedge(v) + \beta g^\wedge(v)$
$f(x+h) \quad (h \in \mathbf{R})$	$e^{ihv} f^\wedge(v)$
$e^{-ihx} f(x) \quad (h \in \mathbf{R})$	$f^\wedge(v+h)$
$\frac{\rho f(\rho x)}{f(-x)} \quad (\rho > 0)$	$\frac{f^\wedge(v+\rho)}{f^\wedge(v)}$
$f(x) = f(-x)$	$f^\wedge(v) = f^\wedge(-v)$ $= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(u) \cos vu du$
$f(x) = -f(-x)$	$f^\wedge(v) = -f^\wedge(-v)$ $= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(u) \sin vu du$
$f(-x)$	$f^\wedge(-v)$
$f(hx) \quad (h \in \mathbf{R}, h \neq 0)$	$ h ^{-1} f^\wedge(v/h)$
$(f * g)(x)$	$f^\wedge(v) g^\wedge(v)$
$f^\wedge(x)$	$f(-v)$
$\left(\frac{d}{dx}\right)^r f(x)$	$(iv)^r f^\wedge(v)$
$x^r f(x)$	$\left(i \frac{d}{dv}\right)^r f^\wedge(v)$
$f \sim(x) \quad (f \text{ 的 Hilbert 变换})$	$\{-i \operatorname{sgn} v\} f^\wedge(v)$
$\{-i \operatorname{sgn} x\} f(x)$	$f \sim(-v)$

续表

$f(x)$	$f^\wedge(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iuv} du$
基本函数	
$\sqrt{2\pi} \chi_{(-1,0)}(x)$	$\frac{e^{iv} - 1}{iv}$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\begin{cases} 1, & v < a \\ \frac{1}{2}, & v = a \\ 0, & v > a \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin x/2}{x/2} \right]^2$	$\begin{cases} 1 - v , & v \leq 1 \\ 0, & v > 1 \end{cases}$
$\frac{3}{\sqrt{8\pi}} \left[\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right]^4$	$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{4} v ^3, & v \leq 1 \\ (2 - v)^3/4, & 1 < v \leq 2 \\ 0, & v > 2 \end{cases}$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (1+x^2)^{-1}$	$e^{- v }$
$(1/\sqrt{2}) e^{-x^2/4}$	e^{-v^2}
$H_n(x) \equiv (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$	$(-i)^n H_n(v)$
$\begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{-x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & -\infty < x < 0 \end{cases}$	$(1+iv)^{-1}$
$ x ^{-s} \quad (0 < \operatorname{Re} s < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1-s)}{ v ^{1-s}} \sin \frac{\pi s}{2}$
$x^{-s} \chi_{(0,\infty)}(x) \quad (0 < \operatorname{Re} s < 1)$	$(\Gamma(s)/\sqrt{2\pi})(iv)^{-(1-s)}$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1+\alpha) \operatorname{Re}(1-ix)^{-1-\alpha}$ $(\alpha > 0)$	$ v ^\alpha e^{- v }$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1+\alpha) \operatorname{Im}(1-ix)^{-1-\alpha}$ $(\alpha > 0)$	$\{-\operatorname{sgn} v\} v ^\alpha e^{- v }$

续表

$f(x)$	$f^\wedge(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iuv} du$
基本函数	
$\frac{e^{-ihx} - 1}{ x } \quad (h \in \mathbf{R})$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log \left \frac{v}{h+v} \right $
$\frac{2^{(2-\chi)/2}}{\Gamma(\chi/2)} x ^{(\chi-1)/2} \chi_{(1-\chi)/2}$ $\times (x) \quad (\chi > 0)$	$(1+v^2)^{-\chi/2}$
$2^\lambda \Gamma(1+\lambda) \frac{J_{1/2+\lambda}(x)}{ x ^{1/2+\lambda}} \quad (\lambda > 0)$	$\begin{cases} (1-v^2)^\lambda, & v \leq 1 \\ 0, & v > 1 \end{cases}$
$\frac{1}{ x+h ^{1-\alpha}} - \frac{1}{ x ^{1-\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1)$	$\frac{\Delta_c(\alpha) e^{ihv} - 1}{\sqrt{2\pi} v ^\alpha}$
$\frac{1}{x} \log \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^2 \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_{av}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{ x }^{\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$	$\begin{cases} 1, & v \leq 1 \\ v ^{-1}, & v > 1 \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \log \frac{1+x^2}{x^2}$	$\frac{1 - e^{- v }}{ v }$
$\sqrt{2} \left(e^{-x^2/4} - x \int_{ x /2}^{\infty} e^{-u^2} du \right)$	$\frac{1 - e^{-v^2}}{v^2}$

表 2 有限 Fourier 变换

$f(x)$	$f^\wedge(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du$
运算规则	
$\alpha f(x) + \beta g(x) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{C})$	$\alpha f^\wedge(k) + \beta g^\wedge(k)$
$f(x+h) \quad (h \in \mathbf{R})$	$e^{ikh} f^\wedge(k)$
$\frac{e^{-iux} f(x)}{f(-x)} \quad (j \in \mathbf{Z})$	$\frac{f^\wedge(k+j)}{f^\wedge(k)}$

续表

$f(x)$	$f^\wedge(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du$
运算规则	
$f(x) = f(-x)$	$f^\wedge(k) = f^\wedge(-k)$ $= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(u) \cos ku du$
$f(x) = -f(-x)$	$f^\wedge(k) = -f^\wedge(-k)$ $= \frac{-i}{\pi} \int_0^{\pi} f(u) \sin ku du$
$(f * g)(x)$	$f^\wedge(k) g^\wedge(k)$
$\left(\frac{d}{dx}\right)^r f(x)$	$(ik)^r f^\wedge(k)$
$f^{\sim}(x)$	$\{-i \operatorname{sgn} k\} f^\wedge(k)$
$\sqrt{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho \chi(\rho(x + 2j\pi))$	$\chi^\wedge(k/\rho)$

基本函数

$\sum_{j=-n}^n c_j e^{ijx}$	$\begin{cases} c_k, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$
$2\pi \chi_{[-1,0]}(x) \quad x \in [-\pi, \pi]$	$\frac{e^{ik} - 1}{ik}$
$\frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$	$\begin{cases} 1, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$
$\frac{1}{n+1} \left[\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right]^2$	$\begin{cases} 1 - \frac{ k }{n+1}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$
$\frac{3}{n(2n^2+1)} \left[\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right]^4$	$\frac{1}{2n(2n^2+1)}$ $\begin{cases} 3 k ^3 - 6nk^2 - 3 k + 4n^3 + 2n, & k \leq n \\ - k ^3 + 6nk^2 - (12n^2 - 1) k + 8n^3 - 2n, & n < k \leq 2n - 2 \\ 0, & k > 2n - 2 \end{cases}$

习题答案

第一章 几何与代数方法初步

§ 1.2

1. $(-1, -2, -3); (-1, 2, -3).$
2. $\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + c^2}; \sqrt{a^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}; \sqrt{(a-x)^2 + b^2 + (c-z)^2}.$
4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}); \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$
5. $\overrightarrow{MN} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}; \overrightarrow{PQ} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}; \overrightarrow{RS} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a}.$
11. (1) $(16, 0, -23);$ (2) $(3m+2n, 5m+2n, -m-3n).$
12. $-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3; \cos \alpha = -\frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{2}{3}, \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$
13. $-\frac{1}{\sqrt{38}}(2, -3, 5).$
14. $\left(\frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{3}}\right).$
15. $4; 7.$
16. $-9; -6\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3.$
17. $(18, 17, -17).$
18. $3\sqrt{10}.$
19. $\sqrt{17}.$
20. $16.$

§ 1.3

1. (1) $x = a;$ (2) $cy + bz = 0.$
2. (1) $5x - 3y - 7z = 0;$ (2) $2x + 3y - 3z - 5 = 0.$
3. 设给定两点为 $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3),$ 给定向量为 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3).$ 所求平面 π 上的任一点为 $M(x, y, z).$ 则平面 π 的方程为

$$\begin{vmatrix} b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} (x - a_1) + \begin{vmatrix} b_3 - a_3 & b_1 - a_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} (y - a_2) + \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} (z - a_3) = 0.$$
4. $x - 2z = 0.$
5. (1) $15x + 2y - 8z - 56 = 0;$ (2) 不能.

6. (1) $D=0$; (2) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1=0$; $D \neq 0$; (3) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1=0$; $D=0$; (4) $\mathbf{n}=\lambda \mathbf{e}_3$ ($\lambda \neq 0$), $D \neq 0$.

$$7. (1) \frac{3-x}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+5}{5}; (2) \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}.$$

$$8. (1) \frac{x-0}{10} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-6}{0}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y-3}{8} \\ z=6 \end{cases}; (2) \frac{x-0}{-32} = \frac{y-\frac{17}{4}}{28} = \frac{z-\frac{1}{8}}{-4}.$$

$$10. B=-6, D=-27.$$

$$11. 10x-20y-27z+54=0.$$

$$12. (1, 2, -1), x+3y+z-6=0.$$

$$13. (1) \mu \neq 7; (2) \lambda=3, \mu \neq 7; (3) \mu=7, \lambda \neq 3.$$

$$14. \text{ 自原点到三平面的距离均为 } \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$15. (1) \text{ 钝角}; (2) \text{ 点}(2, -1, 3)\text{ 及原点在相邻的二面角内}.$$

$$17. \text{ 一对相交平面为 } x+y-z=0 \text{ 与 } x-y+z=0 \text{ 其向量方程为 } \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}=0, \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{p}=0, \text{ 其中 } \mathbf{n}_1=(1, 1, -1), \mathbf{n}_2=(1, -1, 1) \text{ 所成的角为 } 70^\circ 32'.$$

$$18. \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

$$19. \frac{15}{41}\sqrt{41}.$$

$$21. M\left(\frac{1}{3}, 2, 3\right).$$

$$22. (7, 0, -3).$$

$$23. k = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}.$$

$$24. d = \frac{\sqrt{\left| \begin{array}{cc} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_2 & a_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ a_3 & a_1 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{array} \right|^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

$$25. (1) \sqrt{\frac{7}{3}}; (2) \sqrt{\frac{275}{14}}.$$

$$26. P(1.5, 0, 0.5).$$

$$27. \frac{x-3}{0.5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{2}.$$

$$28. (1) \arccos\left(-\frac{4}{9}\right); (2) \arccos \frac{1}{\sqrt{234}}.$$

$$29. \pm\sqrt{6}x + y + z + 1 = 0.$$

$$30. \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$31. \begin{cases} 9x - 2y - 5z + 4 = 0, \\ x + 2y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

$$32. (1) \left(-\frac{27}{35}, \frac{7}{23}, \frac{189}{35}\right); (2) \begin{cases} x - 5y + 3z + 1 = 0, \\ x + 2y + 3z - 22 = 0. \end{cases}$$

$$34. (1) \sqrt{14}; (2) \sqrt{35}; (3) 2\sqrt{29}.$$

$$35. \sqrt{\frac{58}{3}}, \frac{x+2}{-5} = \frac{y}{7} = \frac{z-3}{10}, M_1\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right), M_2(-2, 0, 3).$$

$$36. \frac{\sqrt{6}}{3}|a|, \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z-a}{2}, \frac{x}{a} = \frac{y-a}{2a} = \frac{z}{a}, \frac{x-a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

§ 1.4

$$1. x^2 - 4z^2 = 0.$$

$$2. 9x^2 + 4y^2 = 20.$$

$$3. 2y - 2z - 1 = 0.$$

$$4. 19x^2 + 13y^2 + 7z^2 - 6xy - 10xz - 16yz - \frac{1}{18} = 0.$$

$$5. x = 2 + t, y = -3 - 2t, z = 4 + 2t.$$

$$6. 5x^2 + 10y^2 + 13z^2 - 12xy - 4yz - 6xz - 22x + 60y - 54z + 99 = 0.$$

$$7. 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 1 = 0.$$

$$8. \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)xy + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)xz + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)yz = 0.$$

$$9. \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0, \end{cases} \arccos \frac{3\sqrt{105}}{35}.$$

$$10. x^2 + 9y^2 + 3z^2 - 7xy - 11yz + 4xz + 4x - 4y + 4z - 4 = 0.$$

$$11. (1) y^2 + z^2 - 4x^2 = 0; (2) x^2 - \frac{y^2}{4} - z^2 = 0; (3) 5x^2 + 2y^2 + 3z^2 +$$

$$10xy + 8yz + 10xz = 0; (4) 3x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 2yz - 2xz = 0; (5) \frac{x^4}{16} + \frac{y^4}{81} + 2z^4 - \frac{x^2y^2}{18} - y^2z^2 - 4x^2z^2 = 0.$$

$$13. xy + yz + zx = 0.$$

$$15. 13x^2 - 32y^2 - 32z^2 + 162yz + 108xy - 108xz - 350x + 182y + 280z - 147 = 0.$$

$$16. xy + yz + xz - (x + y + z) + 1 = 0.$$

$$17. (1) x^2 + z^2 = 2ax; (2) y^4 = 4a^2(x^2 + z^2).$$

$$19. y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2).$$

$$20. y^4 = 4(x^2 + z^2), x^2 + y^2 = 2z.$$

$$21. x^2(y^2 + z^2) = 1 \text{ 或 } y^2(x^2 + z^2) = 1.$$

$$23. y^2 = 4x \text{ (直纹面)}.$$

$$24. \frac{x^2}{a^2 \sin^2 \alpha} + \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \alpha} - \frac{z^2}{c^2} = \cot^2 \alpha.$$

$$25. \begin{cases} x^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) + 2xy \cos \alpha \cos \beta + y^2(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - 2px \cos \alpha \\ - 2py \cos \beta - R^2 \cos^2 \gamma = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

26. (1) 在 xy 平面上的投影柱面 $2x^2 + 5y^2 = 25$, 在 yz 平面上的投影柱面 $3y^2 - 2z^2 + 25 = 0$, 在 zx 平面上的投影柱面 $3x^2 + 5z^2 = 100$; (2) $y^2 - 1 = 0$: 曲线在 xy 面上的投影柱面, $y^2 - 1 = 0$: 曲线在 yz 面上的投影柱面, $x^2 - z = 0$: 曲线在 zx 面上的投影柱面.

$$28. \begin{cases} x^2 + y^2 = ax, \\ z = 0. \end{cases}$$

31. 当 $|m| > 1$ 时交线为椭圆, $|m| < 1$ 时交线为双曲线.

$$32. \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

$$33. \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right), \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

§ 1.5

1. (1) 5; (2) 1; (3) -4; (4) $3(x+1)(x-2)$; (5) -7; (6) $-(a^2 - b^2)^2$; (7) $(b-a)(c-a)(c-b)$; (8) $8abc$; (9) 1; (10) $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \cdot \left(1 + \frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda_n}\right)$.

3. (1) $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0)$; (2) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 4, -1, 1)$; (3) $(x, y, z) = (-a, b, c)$.

§ 1.6

1. $(0, 3, -3)$; $(1, 3, -2)$; $(-2, -4, 3)$.

$$2. \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 66 & 24 \\ 20 & 34 \end{bmatrix}.$$

$$3. \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 14 & -4 & 4 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 6 & 14 & -5 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$4. (1) (a_1, a_2, a_3, a_4); (2) (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}); (3) (a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}).$$

$$5. \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

$$6. \begin{bmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$8. \frac{1}{2}3^{n-2} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 18 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$9. \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{bmatrix}, \text{其中 } b_{11}, b_{12} \text{ 任意}.$$

$$16. (1) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; (2) \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$20. \frac{2}{3}I - \frac{1}{3}A.$$

$$21. (1) \begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}; (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$22. \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$23. \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$25. \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. $\alpha = 0$ 时线性相关.

29. (1) 能; (2) 不能.

30. (1) $t \neq 5$; (2) $t = 5$.

31. (1) 3; (2) 2; (3) 3.

32. (1) 线性相关; (2) 线性无关; (3) 线性相关.

34. $t = -2$.

$$39. (1) \begin{cases} x = -1 - 7z, \\ y = 2 + 2z, \\ z: \text{任意}; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = -z + 2w \\ y = 1 + 2z - 2w \\ z: \text{任意} \\ w: \text{任意}; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y = 1 - 2x + z \\ w = 0 \\ x: \text{任意} \\ z: \text{任意}; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1. \end{cases}$$

40. (1) $\lambda = -3$ 无解, $\lambda = 2$ 有无穷多个解, $\lambda \neq 2, 3$ 有惟一解; (2) $\lambda = -2$ 无解, $\lambda = 1$ 有无穷多个解, $\lambda = -2, 1$ 有惟一解.

41. $5a - 2b - c = 0$; 不可能有惟一解.

42. (1) 有; (2) 无; (3) 有.

45. (1) $\{(1, -2, 1, 0, 0), (2, -3, 0, 1, 0)\}$; (2) $\{(-4, 7, 5, 0, 0), (1, -3, 0, 5, 0), (-11, -2, 0, 0, 5)\}$; (3) $\{(-7, -2, 5, 9)\}$; (4) $\{(3, 3, 2, 0), (-3, 7, 0, 4)\}$.

第二章 导数——函数的分析与研究 I

§ 2.1

1. (1) $-1 \leq x < 1$; (2) $(2k\pi)^2 \leq x \leq [(2k+1)\pi]^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$; (3) $k = 0$ 时, $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 或 $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq x \leq 0$, $k = 1, 2, \dots$ 时, $\sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{2}} \leq x \leq \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ 或 $-\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \leq x \leq -\sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{2}}$; (4) $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$; (5) $1 < x \leq 2$.

2. (1) $y \leq \ln 3$; (2) $y \leq \frac{10}{3}$.

3. $b > 1 - a$ 时为空集; $b \geq -a$ 时为 $[b, 1 - a]$; $b < -a$ 时为 $[-a, 1 + b]$.

4. $1, \frac{1+x}{1-x}, -\frac{x}{2+x}, \frac{2}{1+x}, \frac{x-1}{x+1}$.

5. $1 - \frac{1}{x}, x.$

6. $\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$

7. (1) $x^4, 2^{2^x}, 4^x, 2^{x^2}$; (2) $\varphi(\varphi(x)) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0, \end{cases} \varphi(\psi(x)) = 0,$

$\psi(\psi(x)) = 0, \psi(\varphi(x)) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0. \end{cases}$

§ 2.2

5. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{6}$; (3) $\frac{4}{3}$; (4) 1.

8. (1) 1; (2) $\frac{2}{3}$; (3) $\frac{1}{2}$; (4) $\frac{2^3 \times 3^4}{4^7}$; (5) $-\frac{1}{2}$; (6) 4; (7) 1; (8) $\frac{m}{n}$;

(9) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$; (10) 3.

9. 4, 10.

10. 1, -1.

11. 0.

12. 1.

13. (1) $\frac{m}{n}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\sec^2 a$; (4) $-\sin a$; (5) 2; (6) 1; (7) 2.

14. $\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$

15. 0.

16. (1) e^{-1} ; (2) e^6 .

17. (1) 在 $x=0$ 右连续; (2) 在整数点右连续; (3) $A=4$ 连续.

18. $b=1$.

19. (1) 1; (2) e ; (3) $a^b \ln a$; (4) $\frac{a^2}{b^2}$; (5) $-\ln 2$; (6) $\frac{\ln 3}{\ln 2}.$

§ 2.4

1. $\bar{v} = 14 + 3\Delta t; v|_{t=2} = 14.$

2. (1) $-\frac{1}{(x+1)^2}$; (2) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$

3. $f'(0).$

$$4. a = 2x_0, b = -x_0^2.$$

$$5. (1) 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; (2) -x^{-2} - \frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}; (3) 2x + 2 + \frac{1}{x^2};$$

$$(4) \frac{2x^3 + 3x^2 + 2}{(x+1)^2}; (5) 1; (6) 2\operatorname{sgn}[x], x \neq 0, 1; (7) \ln x; (8) -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2};$$

$$(9) \frac{2x \cos x - \sin x}{2\sqrt{x^3}}; (10) \frac{1}{1+e^x}; (11) \frac{1}{1-x^2}; (12) -\frac{2}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(13) \frac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}\sqrt{\sin x}}; (14) 2\sqrt{a^2-x^2}; (15) 2; (16) -\frac{a^2}{x^4-a^4};$$

$$(17) x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x \right).$$

$$6. \frac{2}{t}.$$

$$7. (1) \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}; (2) \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x}.$$

$$8. L: x + y = 4\sqrt{2}, s = 16.$$

$$9. x^2 + y^2 = \frac{1}{2}.$$

$$11. \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \right) dx.$$

$$12. (a \cos ax \cos bx - b \sin ax \sin bx) dx.$$

$$13. (1) -\sin x, \sin(x + \frac{\pi}{2}n); (2) a^2 e^{ax}, a^n e^{ax}; (3) 2x^{-3},$$

$$(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}; (4) a_0 n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-3}x +$$

$$a_{n-2}, a_0 \cdot n!; (5) -\frac{1}{(1+x)^2}, (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; (6) (x+2)e^x, (x+n)e^x.$$

$$14. -\frac{a}{b} \cot t, -\frac{b}{a^2} \csc^3 t.$$

$$15. (1) e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx), e^{ax}[(a^2 - b^2) \cos bx - 2ab \sin bx]; (2) e^{ax}(a \sin bx + b \cos bx), e^{ax}[(a^2 - b^2) \sin bx + 2ab \cos bx].$$

$$16. \frac{x+y}{x-y}, \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

§ 2.6

$$1. (1) (-\infty, \frac{3}{2}) \nearrow, (\frac{3}{2}, +\infty) \searrow; (2) (2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{5\pi}{3}) \nearrow,$$

$$(2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}) \searrow, k \in \mathbb{Z}; (3) (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \searrow, (-1, 1) \nearrow; (4)$$

$(-\infty, 0) \nearrow, (0, +\infty) \searrow$.

2. (1) 极大 2, 极小 0; (2) 极大 $\frac{3}{2}$, 极小 $-\frac{1}{2}$; (3) 极大 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$;

(4) 极小 0, 极大 e^{-1} ; (5) 极大 $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$.

3. (1) 3, 1; (2) $4\pi, 0$; (3) $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

4. (1) $(-\infty, 0)$ 上凹, $(0, 1)$ 下凹, $(1, +\infty)$ 上凹, $(0, 0)$ 为拐点; (2) $(-\infty, +\infty)$ 下凹; (3) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 下凹, $(\pm 1, \ln 2)$ 为拐点; (4) $(-\infty, 0)$ 上凹, $(0, +\infty)$ 下凹, $(0, 0)$ 为拐点.

6. (1) $2a$; (2) a ; (3) 1; (4) 0; (5) 0; (6) ∞ ; (7) 1; (8) $\frac{1}{6}$; (9) e ;

(10) $e^{\frac{1}{2}}$; (11) 1; (12) -1; (13) $\frac{1}{4}$; (14) $\frac{2e}{e-1}$; (15) e ; (16) 1.

7. 2.990 7.

8. 1.006 7, 0.484 9.

§ 2.7

2. (1) $x^2 + y^2 \leq 4$; (2) $-y^2 \leq x \leq y^2$; (3) $x^2 + y^2 - x \geq 0$ 且 $x^2 + y^2 - 2x < 0$.

3. (1) 19; (2) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{12}{y^2}$; (3) $1 - \frac{y}{x} + \frac{3y^2}{x^2}$.

4. (1) 0; (2) 0; (3) $-\frac{1}{4}$; (4) 1; (5) ∞ ; (6) 0.

5. $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

6. (1) $z_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $z_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$; (2) $f_x = -\frac{3(x - x_0)}{r^5}$, $f_y = -\frac{3(y - y_0)}{r^5}$; (3) $z_x = \frac{1}{2} - \pi$, $z_y = 1$; (4) $z_x = \sin y + y^2 e^{xy}$, $z_y = x \cos y + (xy + 1)e^{xy}$.

7. $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0)$, 不连续.

8. 0.

9. (1) $z_{xx} = 6xy^4 - 6y^3 - 2y$, $z_{xy} = 12x^2y^3 - 18y^2 - 2x$, $z_{yy} = 12x^3y^2 - 18xy$; (2) 0; (3) $\frac{1}{y}$; (4) $(yz + 1)e^{yz}$.

11. $dz = 16dx + 28dy$.

12. (1) $dz = \sin 2x dx - \sin 2y dy$; (2) $dz = \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{1+y^2} dy$.

13. 108.

$$14. z_x = e^{xy} \sin(x+y) + e^{xy} \cos(x+y), z_y = x e^{xy} \sin(x+y) + e^{xy} \cos(x+y).$$

$$15. \frac{dz}{dt} = e^{t^3} (\sin t) \cdot (2 \cos t + 3 t^2 \sin t).$$

$$16. \frac{\partial z}{\partial u} = 2u \left[\ln(u^2 - v^2) + \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right], \frac{\partial z}{\partial v} = 2v \left[\ln(u^2 - v^2) - \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right].$$

$$17. \frac{dw}{dt} = \cos(yz^2) \cos t - 2txz^2 \sin(yz^2) - 2xyz e^t \sin(yz^2).$$

$$18. \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}} + 54u^4 v^2 + 81u^4 v^2, \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}} + 54u^5 v.$$

$$19. (1) z_x = \frac{y}{x^2} \frac{1}{x^2 - y^2} \sin \frac{y}{x} - \frac{2x}{(x^2 - y^2)^2} \cos \frac{y}{x}, z_y = \frac{2y}{(x^2 - y^2)^2} \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{(x^2 - y^2)x} \sin \frac{y}{x}; (2) z_x = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2}{x^3}, z_y = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{2}{y^3}; (3) u_x = \left(\frac{x}{y} \right)^x \cdot \left(1 + \ln \frac{x}{y} \right), u_y = - \left(\frac{x}{y} \right)^{x+1}.$$

$$21. \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + f'_2 y + f'_3 yz; \frac{\partial u}{\partial y} = f'_2 x + f'_3 xz; \frac{\partial u}{\partial z} = f'_3 xy.$$

$$22. \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \left(\frac{-y}{x^2} \right) = f'_2 y; \frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \frac{1}{x} + f'_2 x; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} f'_1 + \frac{1}{x} \cdot \left(y f''_{12} - \frac{y}{x^2} f''_{11} \right) + f'_2 + x \left(y f''_{22} - \frac{y}{x^2} f''_{21} \right).$$

$$23. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z^2}{(x+z)^3}.$$

$$24. 2xz.$$

$$25. 0.$$

$$26. \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (2y - 6x).$$

$$27. \frac{1}{2} e^2.$$

$$28. \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$29. \left(\frac{2\sqrt{2}}{125}, \frac{2\sqrt{2}}{125}, -\frac{3}{125} \right).$$

$$30. \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \sqrt{3}.$$

$$31. (1) \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right); (2) \frac{2}{r}; (3) a \cdot \{1, 1, 1\}; (4) 0; (5) 2a; (6) 2a.$$

$$r; (7) 2r \times a; (8) \nabla_x (f(r) \cdot r); (9) \nabla \cdot (f(r) \frac{r}{r}); (10) \nabla \times (f(r) \frac{r}{r}).$$

$$32. (1) 2x + 2y + 2z; (2) 0; (3) \{2, 2, 2\}.$$

$$33. \operatorname{rot} \vec{A} = \{x^2 e^y - 2z \sin y, 2xy^2 z - 2xe^y, -2xyz^2\}.$$

$$35. \text{切线: } \frac{x - \frac{\pi}{2} + 1 + \cos 1}{1 - \sin 1} = \frac{y - 1 + \cos 1}{\sin 1} = \frac{z - 4\sin \sqrt{2}}{2\cos \sqrt{2}}, \text{法平面 } (1 - \sin 1) \cdot$$

$$(x - \frac{\pi}{2} + 1 + \cos 1) + \sin 1(y - 1 + \cos 1) + 2\cos \sqrt{2}(z - 4\sin \sqrt{2}) = 0.$$

$$36. (-1, 1, -1), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}).$$

$$37. \text{切线: } \frac{x}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{0}, \text{法平面 } O - xyz.$$

$$38. \text{切平面 } 4(x-2) + 2(y-1) - (z-5) = 0, \text{法线 } \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-1}.$$

$$39. x - \frac{1}{2} - (y + \frac{1}{4}) + 2(z - 1) = 0.$$

$$40. 2\sqrt{a}.$$

$$42. (1) \text{极小}-5, \text{极大}-1; (2) \text{极小}-\frac{3}{2}, \text{极大}0; (3) \text{极小}-27; (4) \text{无极}$$

值; (5) 极小-1.

$$43. 2.$$

$$44. 50.$$

$$45. -1, 53.$$

$$47. \frac{21^3}{4}.$$

$$48. 1, 11.$$

$$49. \frac{256}{13}, \frac{320}{13}.$$

第三章 积分——函数的分析与研究 II

§ 3.2

$$3. \sin \sqrt{x}.$$

$$4. (1) x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x + c; (2) 2x\sqrt{x} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{4}{5}x + \frac{4}{7}x^2 \right\} + c; (3)$$

$$x^{\frac{7}{6}}(1-x) + c; (4) \tan x - \cot x + c; (5) 10^x \cdot \frac{1}{\ln 10}x - \cot x + c; (6) x -$$

$$\arctan x + c; (7) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c; (8) \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c; (9) \frac{1}{a-b} \cdot \ln \left| \frac{x+b}{x-a} \right| + c; (10) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + c; (11) \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + c; (12) \sin x - \cos x + c; (13) 2 \arctan x - x + c; (14) \frac{1}{2} \tan x + c; (15) -\frac{1}{x} + \arctan x + c; (16) \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 9x + c; (17) x + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c; (18) \frac{1}{2} (x-1) |x-1| + c.$$

$$5. (1) \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c; (2) -\frac{2x^2-1}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + c; (3) x \ln^2 x - \ln x + 2x + c; (4) \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right) + c; (5) x \arctan x - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + c; (6) \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln |x^2+1| + c; (7) -e^{-x} (x+1) + c; (8) \frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) + c; (9) x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + c; (10) \frac{1}{3} x^3 \ln |1+x| + \frac{1}{3} \ln |1+x| - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + c; (11) \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + c; (12) \frac{1}{2} x^2 \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + x + c; (13) \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x \ln \tan x + c; (14) \frac{2 \cos 3x + 3 \sin 3x}{13} e^{2x} + c; (15) \frac{2 \sin 3x - 3 \cos 3x}{13} e^{2x} + c.$$

$$6. (1) -\frac{2}{5} \sqrt{2-5x} + c; (2) \ln |2+e^x| + c; (3) \ln |\ln x| + c; (4) (\ln \sqrt{x} - 1) \cdot \sqrt{x} + c; (5) \cos \frac{1}{x} + c; (6) -\ln |\cos x| + c; (7) \ln |\sin x| + c; (8) -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\cot x} + c; (9) \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c; (10) \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{8} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c; (11) \frac{1}{2} \arctan x - \tan x + \frac{1}{4} \sin(2 \arctan x) + c; (12) \arctan \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sin(2 \arctan \sqrt{x}) + c; (13) \tan(\arcsin x) + c; (14) \ln \left| \tan \left(\frac{\arctan x}{2} \right) \right| + c; (15) -\frac{\sin^2(\arctan x) + 2}{\cos(\arctan x)} + c; (16) \frac{1}{9} \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} + c; (17) \frac{2}{3} \left[\frac{1}{7} (1+x^3)^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{5} (1+x^3)^{\frac{5}{2}} \right] + c; (18) -2 \ln |\cos(\arctan \sqrt{\ln x})| + c; (19) \cos(\arcsin x) - \frac{1}{3} \cos^3(\arcsin x) + c; (20) \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + c.$$

7. (1) $\frac{1}{2} \arctan(\cos 2x) + c$; (2) $2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + c$; (3)
- $$\begin{cases} 2\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}), & \text{若 } x+a > 0, x+b > 0; \\ -2\ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}), & \text{若 } x+a < 0, x+b < 0. \end{cases}$$
- (4) $\tan x \cdot \ln(\sec x) - x + c$; (5) $\frac{1}{2} \arcsin(2x-13) + c$; (6) $\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + c$; (7) $\frac{1}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) \cdot x + c$;
- (8) $\frac{\arctan x}{\cos(\arctan x)} - \ln \left| \tan \left(\frac{\arctan x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right| + c$;
- (9) $\frac{1}{4} \arctan(x + \frac{1}{2}) + c$; (10) $\ln|(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 4}| + c$; (11) $\frac{7}{3} \ln|x+5| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + c$;
- (12) $\frac{1}{x-2} - \frac{11}{2(x-2)^2} + c$; (13) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1} + c$;
- (14) $7 \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + \frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{7}{2(x-1)^2} + c$; (15) $2 \ln|x| - \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + c$;
- (16) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 13) - \frac{1}{3} \arctan \frac{x+2}{3} + c$; (17) $-\frac{1}{x+1} + \ln(x^2 + 2x + 2) - 3 \arctan(x+1) + c$;
- (18) $-\frac{3}{2} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + 2 \arctan(x+2) + c$; (19) $x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + c$;
- (20) $\frac{1}{x+1} + \ln(x^2 + 2x + 1) - \arctan(x+1) + c$;
- (21) $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$; (22) $\frac{1}{15} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{10} \frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{23}{12} \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} - \frac{337\sqrt{3}}{60} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$;
- (23) $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{x}{x^2 + x + 1} + \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$;
- (24) $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c$; (25)
- $$-\frac{\cos 2x}{64} + \frac{\cos^3 2x}{96} - \frac{\cos^5 2x}{320} + c$$
- ;
- (26) $\frac{1}{2} \ln(\cos^2 x) + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x} + c$; (27) $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln|\tan x| + c$;
- (28) $\ln|\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x + c$; (29) $\frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \tan \frac{x}{2} + c$; (30)
- $$\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + c$$
- ;
- (31) $\ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + c$; (32) $\ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| - \frac{\sqrt{2x+1}}{x} + c$;
- (33) $2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - \ln|1 + \sqrt[6]{x+1}| + c$; (34)
- $$\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) + c$$
- ;
- (35) $\frac{4}{3} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{3}{2}} -$

$$8 \arctan \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}} + c; (36) \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{2}} + c; (37) -\frac{3}{2} \frac{1}{2(x + \sqrt{x^2 - x + 1}) - 1} +$$

$$2 \ln |x + \sqrt{x^2 - x + 1}| - \frac{3}{2} \ln |2(x + \sqrt{x^2 - x + 1}) - 1| + c;$$

$$(38) \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + c.$$

$$8. (1) \int_0^1 x^3 dx > \int_0^1 x^4 dx; (2) \int_1^2 x^3 dx < \int_1^2 x^4 dx.$$

$$9. (1) 6 \leq \int_1^3 (x^2 + 2) dx \leq 22; (2) \frac{5}{6} \pi \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7}{6}\pi} (1 + \cos^2 x) dx \leq \frac{5}{3} \pi.$$

$$10. \frac{-1}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$11. 2x^5 e^{-x^2} - x^2 e^{-x}.$$

$$12. \varphi^2(x) e^{-\varphi(x)} \varphi'(x) - \psi^2(x) e^{-\psi(x)} \psi'(x).$$

$$13. x=0 \text{ 为极小值.}$$

$$14. \frac{2-10x^6}{(1+x^6)^2} - \frac{2x}{(1+x^3)^2}.$$

$$15. (1) \frac{1}{2}; (2) \ln 2; (3) 1; (4) \frac{1}{6}.$$

$$16. (1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad (2) 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad (4) 1; (5) 2\sqrt{2} - 2; (6) \frac{15}{2}; (7)$$

$$\arctan e - \frac{\pi}{4}; (8) (\sqrt{3} - 1)a; (9) \frac{1}{6}; (10) \frac{3}{16}\pi; (11) \frac{1}{2}[e^{\frac{\pi}{2}} - 1]; (12) -6 -$$

$$2e; (13) \frac{4}{3}; (14) 12; (15) 0; (16) \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln(3 + \sqrt{2})e; (17) \frac{\pi^2}{4}; (18) 2 - \frac{\pi}{2};$$

$$(19) \ln \frac{2\sqrt{7}+7}{9}; (20) \frac{\pi}{16}; (21) \ln 2; (22) \ln 2 + \frac{5}{72}.$$

$$25. 18.$$

$$26. a\pi b.$$

$$27. \frac{3}{4}\pi a^2.$$

$$28. \frac{3}{2}\pi a^2.$$

$$29. \frac{1}{2}(5\ln 2 - 3).$$

$$30. 3\pi a^2.$$

$$31. \frac{1}{4}\pi a^2.$$

$$32. \frac{a}{2}(e - e^{-1}).$$

$$33. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$34. 6a.$$

$$35. 8a.$$

§ 3.3

$$1. f(0, 0).$$

$$2. (1) \ln \frac{25}{24}; (2) \frac{\pi}{12}; (3) 1.$$

$$3. \pi.$$

$$4. \frac{17}{70}.$$

$$5. \frac{8\sqrt{2}}{21}p^5.$$

$$6. \pi.$$

$$7. 1 - \sin 1.$$

$$8. (1) \int_0^{\pi} f(y) dy \int_0^a dx; (2) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dy + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^{-1} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{x-1}^1 f(x, y) dy.$$

$$9. (1) \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 1; (2) \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}.$$

$$10. (1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr; (2) \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr;$$

$$(3) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr; (4) \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr; (5)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

$$11. \pi(1 - e^{-R^2}).$$

$$12. -6\pi^2.$$

$$13. 3\pi a^2.$$

$$14. \begin{cases} \frac{16}{9} + \ln \frac{\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1}} + \frac{3a^2 - 38a + 81}{18(a-1)\sqrt{a-1}}, & a > 1 \\ \frac{2}{9}a^3, & 0 < a \leq 1. \end{cases}$$

$$15. \int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy; \int_0^{a \cos \beta} dx \int_{\sqrt{a^2 \cos^2 \beta - x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy + \int_{a \cos \beta}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

$$16. \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2).$$

$$17. \frac{2}{3} \pi ab.$$

$$19. \frac{4}{3}(q-p)(b-a).$$

$$21. \frac{5}{24}\pi - \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

$$22. \frac{35}{4} \cos 1.$$

$$23. 4x^3.$$

$$24. (1) \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^H f(x,y,z) dz; (2) \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^c f(x,y,z) dz;$$

$$(3) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z) dz; (4) \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x,y,z) dz;$$

$$25. 2.$$

$$26. \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{5}{8}).$$

$$27. \frac{1}{110}.$$

$$28. \frac{1}{180}.$$

$$29. \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

$$30. \frac{1}{2} \int_0^a (a-z)^2 f(z) dz.$$

$$31. (1) ab\rho; (2) abcr^2 \sin \varphi.$$

$$32. \frac{16}{3}\pi.$$

$$33. \pi R^2.$$

$$34. \frac{4\pi}{3}.$$

$$35. \frac{59}{480}\pi R^5.$$

$$36. \frac{1}{48}a^2 b^2 c^2.$$

$$37. \frac{4}{5}\pi abc.$$

$$38. \frac{\pi R^2}{10}.$$

$$39. \frac{abc}{6}.$$

$$40. \frac{16}{3}a^3.$$

$$41. \frac{6}{7}a^3.$$

$$42. \frac{4}{3}a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

$$43. \frac{128}{75}a^3.$$

$$44. a^2(\pi - 2).$$

$$45. \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

$$46. 16a^2.$$

$$47. 4a^2.$$

$$48. \frac{64}{3}a^2\pi, 4a^2\pi^2.$$

$$49. \frac{32}{5}\pi a^2.$$

§ 3.4

$$1. (1) 5; (2) \sqrt{3}.$$

2. (1) $\frac{2}{3}\sqrt{2}(b^2 - a^2)$; (2) $\frac{2}{3}(1 + \sqrt{2})$; (3) $e^a(2 + \frac{\pi}{4}a) - 2$; (4) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1)$;
(5) $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$; (6) $2a^2$.
3. (1) $\frac{8}{3}\sqrt{2}a\pi^3$; (2) $3\pi a^3$; (3) $\frac{2}{3}\pi$.
4. (1) 3; (2) $\frac{88}{3}$; (3) $a\pi b$; (4) -4π .
5. (1) $\frac{1}{2}\pi a^2(1 + b)$; (2) 13.
6. (1) $\frac{5}{6}$; (2) $\frac{3}{2}$; (3) $-\frac{1}{2}$.
7. (1) -3; (2) 2.
8. $\frac{c^2}{2} - 2\pi a^2$.
9. $2a^2$.
10. $\sqrt{3}(\ln 2 - \frac{1}{2})$.
11. $\frac{15}{2}\sqrt{14}$.
12. $4\pi R^4$.
13. $\frac{1}{3}\pi R^4$.
14. $6\pi a^4$.
15. $\frac{\pi}{24}\sqrt{2}$.
16. $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$.
17. $\frac{2}{15}(1 + 6\sqrt{3})\pi$.
18. 1.
19. $\frac{2}{15}R^5$.
20. 0.
21. $\frac{2}{15}\pi a^4$.
22. $\frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}$.

§ 3.5

1. (1) 1; (2) $\frac{1}{30}$.

2. $ab\pi$.

3. 0.

4. $\frac{15}{4}$.

5. $-\pi$.

6. $\frac{m}{8}\pi a^2$.

7. $\frac{5}{2}\pi - 1 + \cos 2$.

8. 2π .

9. (1) $u = x^2y^3 + \sin xy - \cos y$; (2) $u = xyz(x + y + z)$.

10. (1) 8π ; (2) a^3 ; (3) $\frac{9}{2}$; (4) $4\pi Rr^2$.

11. $\frac{8}{3}\pi^3$.

12. (1) $\frac{12}{5}\pi a^5$; (2) $\frac{15}{8}a^4\pi(1 + \frac{\pi}{2})$; (3) $\frac{9}{10}\pi$.

13. $-\frac{\pi}{2}h^4$.

14. $\frac{4}{3}\pi(a + b + c)$.

15. $4\pi a^5$.

16. $-\frac{7}{36}$.

§ 3.6

1. (1) -2 ; (2) $+\infty$; (3) $\frac{1}{a}$; (4) 1; (5) 1; (6) $\frac{1}{2}$; (7) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$; (8) 0; (9) 0; (10) 0; (11) 0; (12) π .

2. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) π ; (3) $\frac{8}{3}$; (4) 1; (5) $+\infty$; (6) $+\infty$; (7) $\frac{\pi}{3}$; (8) $\frac{\pi}{3}$; (9) $\frac{9}{2}$.

3. (1) 收敛; (2) 发散; (3) $m < 2$ 时收敛, $m \geq 2$ 时发散; (4) 收敛; (5) 发散; (6) 发散; (7) 收敛; (8) 收敛; (9) 收敛; (10) 收敛.

4. (1) $\frac{\pi}{8} \ln 2$; (2) $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \ln(1 + |a|)$; (3) $\ln \frac{\beta}{\alpha}$; (4) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

5. $\frac{1}{y}(3\sin y^3 - 2\sin y^2)$.

§ 3.7

1. $1.17520i$; $\frac{1}{2}[(e^{-1} + e)\cos 2 + i(e^{-1} - e)\sin 2]$; $0.6931 + 2k\pi i$; $\frac{1}{2}\ln 2$;
 $e^{4i(\ln i + 2k\pi)}$.

4. 连续但不一致连续.

6. (1) $\sin z$; (2) $\frac{1}{z}$; (3) $\alpha z^{\alpha-1}$.

7. 不解析, 因为不满足 Cauchy-Riemann 条件.

10. (1) i ; (2) $2i$; (3) $2i$.

11. (1) πi ; (2) $\frac{1}{2}(z_2 - z_1)(x_2 + x_1)$.

13. $\frac{1}{5}\pi i$.

参 考 文 献

- [1] 罗亚平等. 大学数学教程(第一册、第二册). 南京: 南京大学出版社, 2000
- [2] 马传渔. 空间解析几何. 南京: 南京大学出版社, 2000
- [3] 龚升, 张声雷. 简明微积分. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1993
- [4] 李忠, 周建莹. 高等数学简明教程. 北京: 北京大学出版社, 1998
- [5] 邹应. 数学分析. 北京: 高等教育出版社, 1995
- [6] [苏]菲赫金哥尔茨 ΓM . 微积分学教程. 北京大学高等数学教研室等译. 北京: 人民教育出版社, 1954
- [7] 余家荣. 复变函数. 北京: 高等教育出版社, 2000
- [8] 郑维行, 王声望. 实变函数与泛函分析概要. 北京: 高等教育出版社, 1992
- [9] 苏维宜. 近代分析引论. 北京: 北京大学出版社, 2000
- [10] 文志英等. 分形几何理论与应用. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1999
- [11] 陈仲. 高等数学: 学习指导与习题解析. 南京: 南京大学出版社, 2001
- [12] 陈兰祥. 高等数学典型题精解. 北京: 学苑出版社, 2000